

COURS

D'ASTRONOMIE



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

COURS
D'ASTRONOMIE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

H. FAYE,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Inspecteur général de l'Enseignement supérieur,
Professeur à l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

ASTRONOMIE SOLAIRE. — THÉORIE DE LA LUNE. — NAVIGATION.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1883

AVERTISSEMENT.

Ce Volume comprend la théorie du Soleil, celles des planètes et des comètes, la précession, l'aberration, les parallaxes, la théorie de la Lune, l'application de l'Astronomie à la Navigation et aux voyages d'exploration terrestre.

La partie historique se réduit à l'Introduction, à un exposé rapide de la Géométrie céleste des Anciens et à un chapitre spécial sur l'introduction de la Mécanique dans l'Astronomie, au cours du XVIIe siècle.

L'Astronomie physique est représentée par les notions les plus essentielles sur la constitution du Soleil et des Comètes.

On s'est borné au strict nécessaire pour les éclipses et les occultations. En revanche, on a cru devoir développer, un peu en dehors du programme, l'importante question de la parallaxe du Soleil, et, surtout le calcul des orbites des comètes ou des planètes nouvellement découvertes. L'auteur a donné la méthode générale de Laplace, et celle d'Olbers pour les orbites paraboliques, avec un exemple numérique.

Les questions relatives aux perturbations sont du domaine exclusif de la Mécanique céleste; elles ne pouvaient être qu'indiquées ici. Toutefois on n'a pas perdu une seule occasion de signaler les grands résultats auxquels les Géomètres sont parvenus. On a même tâché de donner une idée de la découverte

théorique de Neptune et de la détermination des masses perturbatrices par le calcul des inégalités qu'elles produisent, en prenant pour type l'inégalité mensuelle de la Terre.

Le dernier Livre contient les notions indispensables au Navigateur et au Géographe. Si l'on rapproche le Livre VII de ce Volume des Livres IV et V du précédent, l'ensemble des applications paraîtra assez complet.

On a placé, à la fin de ce Volume, le Tableau du système solaire, comprenant un Catalogue nouveau de toutes les comètes qui ont été observées jusqu'à ce jour, et les Tables numériques nécessaires au calcul des orbites ([1]). On trouverait difficilement ailleurs la réunion de ces documents. L'auteur ne saurait trop recommander aux débutants de s'essayer à ces calculs : ils ont l'immense avantage d'offrir une application facile de théories élevées et de récompenser parfois un premier effort par quelque découverte intéressante. Plus d'un Astronome en renom a débuté par là.

L'*errata* des tomes I et II, placé à la fin de ce Volume, est dû aux bons soins de M. Rozé, répétiteur à l'École Polytechnique.

([1]) L'auteur doit ce Catalogue, qui va de l'an — 375 à l'an 1882, à l'obligeance de son savant confrère M. Lœwy.

SYMBOLES ET CONVENTIONS.

Mesure du temps.

H, heure solaire moyenne du lieu. H_v, heure solaire vraie.
H_p, heure moyenne de Paris.
e, équation du temps.
t, date ou intervalle de temps exprimé en années ou en jours.

Dans le Ier Volume, H désigne constamment l'heure sidérale; dans le second, le même symbole désigne constamment l'heure solaire moyenne, et l'on emploie H_s pour l'heure sidérale, dont il est rarement question.

Coordonnées écliptiques.

ω, obliquité de l'écliptique.
γ, point vernal, origine commune des Æ et des L.
L, longitude comptée du point γ, dans le sens direct, de 0° à 360°.
β, distance au pôle de l'écliptique, de 0° à 180°.
☉ et R, coordonnées géocentriques du Soleil.
♁, longitude héliocentrique de la Terre.

Coordonnées dans l'orbite d'une planète.

$\mathfrak{L}$, *r*, longitude héliocentrique et rayon vecteur.
v, anomalie vraie comptée du périhélie.
u, anomalie excentrique comptée du périhélie.
m, anomalie moyenne comptée du périhélie.

Éléments de l'orbite d'une planète.

a, demi-grand axe.
e, excentricité exprimée en parties du demi-grand axe.
ϖ, longitude du périhélie.
$\mathfrak{L}_0$, longitude moyenne de l'époque.
☊, nœud ascendant, point où l'astre traverse l'écliptique en passant de l'hémisphère sud dans l'hémisphère nord.
N, longitude du nœud ascendant ☊.

i, inclinaison comptée de 0° à 90° à partir de l'écliptique.
θ, date du dernier passage de l'astre au périhélie.

Ces longitudes sont comptées dans l'orbite, à partir d'un point γ' tel que

$$\gamma' \Omega = \gamma \Omega = N.$$

n, moyen mouvement diurne.
m, masse d'une planète.
μ, constante du système solaire $= f$ M, f étant l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance et M la masse du Soleil.

Dimensions et parallaxes.

(ρ), rayon équatorial de la Terre en mètres.
ρ, rayon terrestre à la station de l'observateur exprimé en parties de (ρ).
r, rayon de l'astre considéré.
Δ, diamètre angulaire.
P, parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.
π, parallaxe horizontale équatoriale du Soleil.
p, parallaxe de hauteur.

Navigation.

V, angle de route compté, comme les azimuts, du point S dans le sens S.-O.-N.-E.
s, arc de loxodromie.
δ, déclinaison de l'aiguille aimantée.
D, déviation de l'aiguille due aux fers du navire.
M, azimut magnétique.

Doubles emplois.

ρ, rayon terrestre; distance d'un astre à la Terre projetée sur l'écliptique.
e, équation du temps; excentricité.
δ, distance angulaire d'un astre au pôle; déclinaison de l'aiguille aimantée.
V, vitesse linéaire d'un astre; angle de route.
ρ, ζ, ξ, η, coordonnées géocentriques d'un point de la surface de la Terre; ξ, η, coordonnées géocentriques du Soleil.

COURS
D'ASTRONOMIE.

INTRODUCTION.

Bien que ce Livre n'ait nullement pour but de retracer l'histoire de l'Astronomie, j'ai cru devoir en signaler les phases principales. Ces notions succinctes du passé font mieux comprendre l'état actuel de la Science. D'ailleurs les évolutions successives de l'Astronomie ont été en rapport intime, chez presque tous les peuples, avec celles de l'esprit humain. L'idée que nous nous faisons de l'Univers réagit en effet sur l'ensemble de nos conceptions et imprime par là un cachet spécial à chaque âge historique. Lorsqu'on réduisait l'Univers à ce que nos sens nous en montrent immédiatement, c'est-à-dire à un disque plat, la Terre, recouvert d'une cloche solide, le Ciel, l'activité intellectuelle de l'homme, étreint dans cette création étroite, coudoyé par toutes les forces de la nature dont il se faisait des génies ou des divinités, devait être singulièrement réduite. C'était l'âge des sorciers et des magiciens. L'homme a commencé à respirer plus librement lorsque son domaine lui est apparu comme un globe isolé, réservé à lui seul pour la vie terrestre. Mais, comme ce globe restait encore le centre du monde autour duquel tout le reste de l'Univers tournait sous la direction d'intelligences supérieures, l'homme a pu croire que les phénomènes célestes devaient se rapporter à lui. Son sort lui semblait déterminé d'avance; on pouvait le calculer d'après les aspects des planètes désormais hors de sa portée. Un lourd fatalisme se retrouvait ainsi au fond des choses humaines : c'était l'âge de l'Astrologie. Aujourd'hui ces illusions ont disparu : la Terre n'est plus qu'une planète, je dirais presque un projectile comme les autres, régi par les lois

de la Mécanique ordinaire. Le monde solaire dont elle fait partie n'est lui-même qu'une fraction imperceptible de l'Univers. Mais cet Univers, si démesurément agrandi, n'est plus qu'un ensemble de corps inertes régi par des forces inconscientes, et l'homme, si rabaissé par là au point de vue matériel, se relève dans le sentiment de son intelligence et de sa liberté morale : il doit viser bien plus haut.

Ces évolutions astronomiques devaient d'ailleurs commencer dès la première ébauche de la vie sociale. Les premiers groupes, en se civilisant, avaient besoin de régler les temps et de connaître les lieux. L'institution capitale des calendriers, la nécessité continue d'une orientation exacte, la navigation enfin ont sans cesse demandé de nouveaux progrès à l'Astronomie. Celle-ci, par surcroît, a développé peu à peu la conception, d'abord rudimentaire, de l'Univers. Nous plaçons à la fin de cette Introduction le Tableau (p. xv) de ces principales phases, avec l'indication des noms les plus illustres et des livres qui ont fait époque.

Peut-être trouvera-t-on que j'ai trop insisté sur l'Astronomie des Anciens. Le fait est que ces développements ne seraient guère de mise dans un Cours, tel que celui que j'ai l'honneur de faire à l'École Polytechnique; mais ce que l'auditeur n'aurait pas le temps de suivre peut trouver place dans un livre qu'on prend et qu'on ferme à loisir. L'Astronomie des Anciens est trop souvent considérée comme une vieille erreur dont Copernic et Galilée nous ont débarrassés. A titre de Géométrie céleste, elle est admirable en bien des points et digne assurément des grands génies de la Grèce, mère des sciences. Rien de plus intéressant d'ailleurs que de voir la Mécanique s'y introduire vers la fin du XVIIe siècle et la transformer. Enfin, au point de vue tout philosophique de la méthode, l'étude de ces phases nous montre comment une science, la plus parfaite de toutes, parvient à se dégager de la recherche des causes premières et des hypothèses sur la nature intime des choses.

Il y a pourtant, dans le langage même de cette Science, un sujet de méprise qu'il importe d'écarter : je veux parler du mot d'*attraction*. Bien des gens pensent encore aujourd'hui qu'en se servant de ce terme les Astronomes attribuent à la matière une vertu attractive qui lui permet d'agir, sans intermédiaire, sur les corps les plus éloignés. C'est justement là ce qui a nui si longtemps à la doctrine newtonienne auprès des plus illustres Géo-

mètres du continent. « J'estime fort, disait Huygens, les beaux travaux de M. Newton sur les mouvements des corps célestes et sur la force qui les régit; mais je regrette qu'il nous parle de cette vertu attractive à distance dont il prétend doter chaque particule de matière. » Il fallut que Newton protestât hautement contre cette imputation; il l'a fait dans des termes qui ne laissent place à aucun doute :

« Que la gravité soit innée, inhérente et essentielle à la matière, de sorte qu'un corps puisse agir sur un autre corps à distance, à travers le vide et sans aucun intermédiaire qui transmette cette action, c'est pour moi une absurdité si grande qu'il me semble impossible qu'un homme capable de traiter de matières philosophiques puisse y tomber. »

« Mais cet intermédiaire est-il matériel ou immatériel? C'est ce que je laisse aux lecteurs à décider. »

Dans l'admirable scolie qu'il a consacré à l'idée de Dieu, à la fin du Livre des *Principes*, il fait la déclaration suivante :

« Je n'ai pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité, et je n'imagine point d'hypothèses; car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse, et les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale..... Il suffit que la gravité existe, qu'elle agisse suivant les lois que nous avons exposées et qu'elle puisse expliquer tous les mouvements des corps célestes et ceux de la mer. »

Et il termine par ces lignes bien remarquables :

» Ce serait ici lieu d'ajouter quelque chose sur cette espèce d'esprit très subtil qui pénètre à travers tous les corps solides et qui est caché dans leur substance : c'est par la force et l'action de cet esprit que les particules des corps s'attirent mutuellement aux plus petites distances, et qu'elles cohèrent lorsqu'elles sont contiguës; c'est par lui que les corps électriques agissent à de plus grandes distances tant pour attirer que pour repousser les corpuscules voisins, et c'est encore par le moyen de cet esprit que la lumière émane, se réfléchit, s'infléchit, se réfracte et échauffe les corps; toutes les sensations sont excitées et les membres des animaux sont mus, quand leur volonté l'ordonne, par les vibrations

de cette substance spiritueuse qui se propage des organes extérieurs des sens, par les filets solides des nerfs, jusqu'au cerveau, et ensuite du cerveau dans les muscles. Mais ces choses ne peuvent s'expliquer en peu de mots; et l'on n'a pas fait encore un nombre suffisant d'expériences pour pouvoir déterminer exactement les lois selon lesquelles agit cet esprit universel. »

Peut-être est-ce dans cette voie hypothétique que Newton aura cherché en vain. Il est donc naturel de se demander aujourd'hui si les travaux ultérieurs des physiciens et des physiologistes sur l'éther ont fait connaître ces lois et ouvert la voie à une explication satisfaisante de la gravité. On se représente aujourd'hui cet éther comme un milieu très subtil, éminemment élastique, impondérable, répandu dans l'espace infini; ses vibrations se propagent rapidement en produisant sur nos yeux l'impression de la lumière, de même que celles de l'air, milieu plus grossier et pondérable, produisent sur l'ouïe l'impression du son. Mais, de quelque manière que ces vibrations s'exécutent, qu'elles procèdent par ondes sphériques comme dans l'air, ou que les particules éthérées oscillent dans des plans perpendiculaires à la direction où se propage la vibration, on ne voit pas comment cette hypothèse s'appliquerait à la gravitation. D'ailleurs les particules de cet éther doivent être tenues à distance par des forces répulsives dont la conception est tout aussi difficile que celle de l'attraction des molécules ordinaires.

Dans ces derniers temps, l'hypothèse de l'éther a perdu du terrain; on a émis sur la constitution intime des corps une hypothèse qui semble s'adapter beaucoup mieux à notre problème. Supposez que la matière soit formée de corpuscules pesants, parfaitement élastiques et animés dans tous les sens de mouvements rectilignes, du moins en dehors de leurs sphères d'attraction mutuelle : on aura constitué ainsi une sorte de gaz. Si ces corpuscules sont renfermés, par exemple, dans une enceinte solide et fermée de toutes parts, ils iront en choquer les parois de manière à produire sur eux l'apparence d'une pression, et comme, en vertu de leur élasticité, ils rebondissent aussitôt sans perte de vitesse, leurs mouvements dureront toujours avec la même énergie, les pressions exercées demeureront constantes. Cette hypothèse rend compte en même temps des phénomènes de la chaleur, si l'on consent à identifier le calorique avec la force vive des molécules

gazeuses, et si l'on admet que leurs trajectoires rectilignes, sans cesse interrompues et entrecroisées par leurs chocs mutuels, ne sauraient disparaître que par la suppression de cette même force vive, c'est-à-dire par la réduction de la température au zéro absolu.

Il est bien évident que des corps quelconques, plongés dans ce milieu et imperméables à ses molécules, éprouveraient en tous sens la même pression que les parois et ne recevraient aucune impulsion les uns vers les autres; mais il est facile de modifier l'hypothèse de manière à produire cette impulsion.

Imaginez, en effet, que l'espace soit rempli d'une sorte particulière de particules matérielles élastiques, se mouvant en tous sens, en ligne droite, avec une vitesse très grande, et qu'au lieu d'être arrêtées, comme celles des gaz, à la surface des corps, elles passent entre leurs atomes comme à travers un crible, parce qu'elles sont incomparablement plus ténues que les interstices qui séparent ceux-ci. Un corps ordinaire, étant plongé dans un tel milieu, recevra à chaque instant, sur chacun de ses atomes relativement grossiers, des impulsions égales dans tous les sens : il restera donc immobile. Mais, si l'on place un autre corps, à une distance quelconque du premier, ces deux corps se feront mutuellement écran, non par leurs surfaces extérieures, mais par leurs atomes. Les impulsions du milieu cesseront d'être égales en tous sens, et ces deux corps seront sollicités l'un vers l'autre avec une énergie proportionnelle, à peu près, au produit des nombres respectifs de leurs atomes, c'est-à-dire de leurs masses, et en raison inverse du carré des distances.

A la vérité, les Astronomes, dans leurs calculs, admettent que l'attraction est exactement en raison des masses et qu'elle n'est affaiblie par l'interposition d'aucune épaisseur de matière. Mais, au fond, la contradiction peut être levée, car cette loi n'est qu'approximativement établie par les faits. Laplace a montré que l'attraction d'un point central de la Terre s'exerçant sur un point extérieur, à travers 1600 lieues d'épaisseur d'une matière 5 à 6 fois plus dense que l'eau, pourrait être affaiblie par cet écran d'un peu moins d'un millionième. C'est du moins la marge que laisse la petite incertitude des observations.

On voit avec quelle facilité les corpuscules gravifiques devraient traverser cette épaisseur pour que l'action qu'ils produisent sur une molécule ainsi protégée ne fût réduite que d'un millionième.

De même cette conception s'écroulerait si l'attraction était instantanée, ainsi que les Astronomes l'admettent dans leurs calculs, car alors il faudrait attribuer aux corpuscules gravifiques une vitesse infinie. Mais Laplace, ayant examiné à fond cette question, a fait voir que les observations les plus délicates et les plus précises ne seraient pas incompatibles avec une vitesse de propagation finie de la gravité, pourvu que cette vitesse dépassât cent millions de fois celle de la lumière. Il suffira donc, pour accommoder l'hypothèse aux faits, d'admettre que les corpuscules de l'éther gravifique viennent de l'infini, dans toutes les directions, avec une vitesse un peu supérieure à 76000 fois cent millions de lieues par seconde.

Enfin, comme les Astronomes ont prouvé que la gravité ou l'attraction des corps est indépendante de leur état physique ou chimique, il faudra admettre, si difficile que cela soit, que le groupement de leurs atomes, l'élargissement ou le rétrécissement de leurs intervalles moléculaires sont sans influence appréciable sur leur perméabilité pour l'éther gravifique.

On ne saurait attribuer à un tel milieu la faculté de transmettre les vibrations lumineuses. Il faudra donc que les Physiciens conservent leur éther, également infini, pénétrant également tous les corps, mais immobile, élastique et impondérable malgré l'action incessante du premier.

Voilà de quelle manière et à quel prix on parvient à plier l'hypothèse aux faits. Autant vaut dire que, en dépit du grand développement des sciences de tout ordre, la question ainsi posée n'a pas fait un seul pas. Contentons-nous donc, avec tous les Géomètres, tous les Astronomes sans exception, de la notion introduite par Newton, puisqu'elle figure seule dans les équations fondamentales de la Mécanique céleste et qu'elle suffit à notre Science, dont elle résume les immenses progrès, tout en déclarant que par ce mot d'*attraction*, plus commode que celui de *gravitation*, nous entendons seulement la force, quelles qu'en soient la nature intime et la cause véritable en vertu de laquelle les corps gravitent les uns vers les autres, aussi bien sur notre sol que dans les espaces célestes (1).

(1) Si le lecteur veut approfondir ces discussions, nous le renverrons au bel Ouvrage de M. Hirn intitulé : *Conséquences philosophiques et métaphysiques de la Thermodynamique. Analyse élémentaire de l'Univers*. Paris, 1868. Gauthier-Villars.

CONQUÊTE DU GLOBE.	ÉTAT DE L'ASTRONOMIE.	IDÉE DE L'UNIVERS.
	Période antéhistorique.	
Vie nomade. Grandes migrations peuplant la Terre, sans idée de retour au sol natal.	Première idée du mouvement diurne des astres. Orientation. Phases hebdomadaires et révolution mensuelle de la Lune. Calendriers lunaires.	Les astres s'éteignent au Couchant et se rallument à l'Orient. La Terre est un disque plat soutenant la voûte solide du ciel.
	A partir de l'an — 3000.	
Les populations se fixent au sol : Chinois, Chaldéens, Égyptiens. De petits peuples ou de simples tribus pratiquent seuls le commerce et la navigation côtière.	Institution officielle des calendriers solaires. Collèges à la fois astronomiques et astrologiques en Chine, à Babylone, etc. Division du zodiaque en constellations. Détermination fréquente de la durée de l'année, des saisons. Première éclipse observée en Chine en — 2697. Obliquité de l'écliptique mesurée en Chine en — 1100. Éclipses observées avec précision à Babylone à partir de — 620. Période chaldéenne des éclipses.	La voûte céleste s'agrandit : c'est la demeure des astres et des dieux. Les astres, conduits par des divinités spéciales, parcourent alternativement le ciel et les régions inférieures. (*Hésiode, Homère, récit de Her.* dans la *Rép. de Platon.*)
	De — 400 à + 150.	
Navigation hauturière à ses débuts. L'Asie et l'Afrique sont ouvertes à la civilisation par les expéditions des Grecs, puis des Romains. On commence à connaître les 180 premiers degrés de longitude.	Mouvements circulaires et uniformes des astres. Premier catalogue d'étoiles d'Aristide et Timocharis, — 300. Observations d'Alexandrie, — 280. Eratosthènes mesure exactement la Terre, — 220. Théorie de l'excentrique et découverte de la précession par Hipparque, — 150. Réforme du calendrier par Jules César, — 46. Principales inégalités de la Lune; théorie des planètes, Ptolémée. *Almageste* de Ptolémée, + 150.	La Terre n'est plus un disque plat surmonté d'une cloche transparente et bleue, mais un globe entièrement isolé dans l'espace. Il y a plusieurs cieux sphériques et concentriques, un pour chaque planète. Au centre est placée la Terre immobile. La sphère qui porte les étoiles renferme tout l'univers et tourne tout d'une pièce, avec les astres qu'elle contient, autour de la Terre. (*Songe de Scipion.*)

CONQUÊTE DU GLOBE.	ÉTAT DE L'ASTRONOMIE.	IDÉE DE L'UNIVERS.
	De + 400 à + 1500.	
Invasion des Barbares. Suppression des communications avec l'Orient par le mahométisme. Les notions géographiques s'oblitèrent.	Quelques progrès de détail par les Arabes sous l'inspiration de l'*Almageste*. Tables Alphonsines, 1483.	Mêmes notions. Vers la fin de cette période, on commence à sentir la complication croissante du système des anciens. (*Mot célèbre du roi Alphonse.*)
	De 1500 à 1700.	
Grande navigation hauturière. Rétablissement des communications avec l'extrême Orient par le Cap, 1498. Découverte de l'Amérique, 1492. Premier voyage autour du monde, Magellan, 1519.	Copernic, *De revolutionibus*, 1543. Observations de Tycho, 1580. Lois de Kepler et Tables Rudolphines, 1609-1627. Galilée. Lois de la chute des corps, 1602. Découverte des lunettes, 1610. Les lois du mouvement curviligne, Huygens, 1660. Création de l'Observatoire de Paris, 1667, et de la *Connaissance des temps*, 1679. Découverte de la gravitation universelle. *Phil. nat. principia mathematica*, Newton, 1686.	Renversement complet des idées précédentes. C'est la Terre qui tourne et non l'univers; c'est le Soleil qui occupe le centre du monde. La Terre, comme les planètes, n'est plus qu'un satellite du Soleil. L'Astrologie judiciaire disparaît. Les étoiles sont des soleils comme le nôtre, disséminés dans l'espace. Distinction entre le monde solaire et l'univers. (*Pluralité des mondes* de Fontenelle).
	XVIII[e] siècle.	
Colonisation des deux Amériques. Conquête des Indes orientales. Toutes les régions du globe sont explorées, sauf les pôles et l'intérieur de certains continents.	Élaboration de la doctrine newtonienne par Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace. Premières Tables de la Lune propres à la navigation, T. Mayer, 1755. Mesure de la Terre par les Académiciens français, 1747. Mouvement de translation du système solaire, Herschel, 1783. *Mécanique céleste* de Laplace, 1790.	L'Astronomie solaire ramenée à un simple problème de Mécanique. Stabilité du système solaire, et son indépendance par rapport au reste de l'univers. Nébuleuses considérées comme des mondes en voie de formation. (*Exposition du système du monde*, de Laplace.)

CONQUÊTE DU GLOBE.	ÉTAT DE L'ASTRONOMIE.	IDÉE DE L'UNIVERS.
	XIXe siècle.	
Prise de possession du globe terrestre par la navigation rapide à vapeur, les chemins de fer, le percement des isthmes et la télégraphie électrique.	Tables des planètes fondées sur les théories de Laplace : Bouvard et Lindenau, 1810, Le Verrier, 1860. Tables de la Lune fondées sur la seule théorie de la gravitation : Damoiseau, 1820, Delaunay, 1860. Découverte de Neptune : Le Verrier, Adams, 1846. Grandes opérations géodésiques. Dimensions de la Terre déterminées à 40^T près. Thermodynamique, R. Mayer et Joule, 1840. Analyse spectrale, Kirchhoff, 1862.	Incandescence du Soleil et des étoiles enfin expliquée. Identité chimique des astres et des éléments terrestres. Cosmogonie du système solaire servant de prodrome à l'histoire géologique de notre globe.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE DU SOLEIL.

Le jour sidéral, l'heure sidérale, la pendule sidérale dont nous avons fait constamment usage dans le premier volume pour la mesure du temps, ne servent qu'aux observations méridiennes; les astronomes eux-mêmes ne les emploient pas dans leurs calculs. Conformément aux usages civils, qui doivent se plier à l'alternative des levers et des couchers du Soleil, ils se servent du jour solaire. Mais nous avons dû éviter, dans la première Partie de ce Cours, les complications qui en résulteraient. C'est qu'en effet la rotation de la Terre, rapportée au point γ, est une constante propre à servir de mesure pour le temps, tandis que la même rotation estimée par rapport au Soleil, c'est-à-dire l'intervalle de deux retours consécutifs du Soleil au méridien, n'est pas constante, parce que l'ascension droite du Soleil ne varie pas d'une manière uniforme. Ce sera l'objet d'un Chapitre spécial d'exposer les moyens par lesquels les astronomes ont réussi à remplacer le Soleil vrai par un Soleil fictif dont le mouvement uniforme, combiné avec la rotation terrestre, constitue un jour solaire moyen de durée constante.

Tâchons d'en donner dès à présent une idée. Comme le Soleil fait sa révolution en sens direct, opposé au mouvement diurne, et revient au point γ après 366,2422 jours sidéraux, il a dû, dans ce laps de temps, faire un tour de moins que le point γ lui-même, c'est-à-dire passer une fois de moins au méridien (¹). Par conséquent

$$365{,}2422 \text{ jours solaires} = 366{,}2422 \text{ jours sidéraux.}$$

(¹) C'est ce qui arrive à un navigateur faisant le tour de la Terre en sens opposé

Le jour sidéral est donc plus court que la moyenne des jours solaires d'environ $\frac{1}{366}$, c'est-à-dire de $3^m 56^s$.

Les astronomes n'employaient autrefois dans leurs observatoires que le jour et l'heure solaire. Mais alors l'heure marquée par leur pendule, à l'instant où ils observaient le passage d'un astre au méridien, ne donnait pas immédiatement son ascension droite. Il fallait, pour l'obtenir, un calcul de parties proportionnelles basé sur cette différence de $3^m 56^s$ qu'on nommait assez improprement *accélération des fixes*, parce qu'en supposant qu'à un jour donné une étoile passât au méridien en même temps que le Soleil, le lendemain elle y passait $3^m 56^s$ plus tôt. L'astronome français Delisle eut l'heureuse idée de supprimer ces réductions continuelles en raccourcissant le pendule de son horloge de manière à lui faire battre $3^m 56^s$ de moins par jour. De cette façon il lui suffisait d'un coup d'œil sur le cadran pour y lire l'ascension droite (en temps) des astres qui passaient à cet instant au méridien. Telle est l'origine de l'institution du jour ou du temps sidéral, toujours en usage depuis cette époque dans les observatoires. Il n'en est pas sorti, parce que l'horloge ainsi réglée n'est plus d'aucun usage dans la vie ordinaire qui se modèle sur la marche diurne du Soleil. Si elle est d'accord aujourd'hui avec l'heure solaire (cela arrive une fois seulement par année, vers le 21 mars), demain l'écart sera de $3^m 56^s$; dans un mois il sera de 2^h et au bout d'un an il sera de 24^h, c'est-à-dire d'un jour entier.

Le jour solaire vrai en un lieu quelconque se réglait, malgré ses petites inégalités, comme le jour sidéral, sauf que le Soleil remplaçait le point ♈ [1]. Sa durée était partagée en 24 heures, dont la durée variait imperceptiblement d'un jour à l'autre; l'angle horaire du Soleil, exprimé en temps, n'est autre chose que l'heure solaire vraie. C'est ce jour solaire vrai, cette heure solaire vraie

à sa rotation, c'est-à-dire de l'est à l'ouest. Lorsqu'il revient à son point de départ, il a compté un jour de moins que ceux qui y sont restés; son livre de bord se trouverait à l'arrivée en retard d'un jour entier, s'il n'avait eu la précaution d'augmenter ses dates d'une unité en passant au 180° degré de longitude à partir de son premier méridien.

[1] Le jour civil ne diffère du jour astronomique qu'en ce que le premier commence à minuit, à l'instant où le Soleil passe au méridien inférieur, tandis que le second commence à midi, instant du passage au méridien supérieur.

que nous remplacerons plus tard par le jour et l'heure solaire moyens; c'est-à-dire ramenés à l'uniformité par la substitution d'un Soleil fictif au Soleil vrai.

On voit que nous conserverons ici le langage des apparences en parlant du mouvement annuel et du mouvement diurne du Soleil. Comme les mouvements apparents sont la traduction géométrique des mouvements réels, il n'y a là aucun inconvénient.

CHAPITRE I.

PREMIÈRE IDÉE DU MOUVEMENT ANNUEL DU SOLEIL.

Quand on observe le Soleil jour par jour aux instruments méridiens, on trouve qu'au bout d'un an son Æ a varié de 0° à 360°; le Soleil a fait le tour entier du ciel en sens opposé du mouvement diurne. Pendant ce temps, sa distance angulaire δ au pôle a varié entre les limites $90° - 23°\frac{1}{2}$ et $90° + 23°\frac{1}{2}$, et en suivant ces variations on constate que le Soleil a parcouru sur la voûte céleste un grand cercle, l'écliptique, incliné de $23°\frac{1}{2}$ sur l'équateur. Tous les ans les mêmes phénomènes se reproduisent.

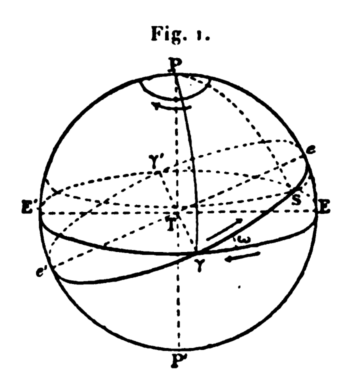
Il y a ici deux questions différentes à examiner : 1° le mouvement annuel du Soleil sur l'écliptique, indépendamment de toute considération locale; 2° les effets de ce mouvement pour un observateur placé en un point déterminé du globe terrestre. La figure suivante est relative à la première question.

Orbite annuelle du Soleil.

On a dessiné sur un globe céleste (*fig.* 1) la trajectoire apparente du Soleil. Le grand cercle de l'écliptique est déterminé par sa trace $\gamma\gamma'$ et son inclinaison ω sur l'équateur. Des deux nœuds γ et γ', l'ascendant est γ (t. I, p. 54). C'est lui qui a été pris sur la sphère céleste pour origine des Æ, et pour marquer en un lieu donné, par son passage au méridien de ce lieu, l'origine des heures sidérales. Lorsque le Soleil, parcourant lentement ce grand cercle $\gamma e \gamma' e'$ et obéissant en même temps chaque jour à la rotation diurne du ciel, se trouve au point γ, le parallèle qu'il décrit sensiblement ce jour-là autour de l'axe PP' est l'équateur EE'. Alors le jour est égal à la nuit sur tous les horizons, quel que soit λ.

C'est l'équinoxe de printemps : de là le nom de *point vernal* donné au point γ. Même phénomène lorsque le Soleil se trouve, six mois après, au point opposé γ' : c'est l'équinoxe d'automne.

Fig. 1.



Le Soleil marche ensuite de γ vers e, en se rapprochant peu à peu du pôle. Les parallèles diurnes se rétrécissent. En e, δ atteint sa plus petite valeur ; sa variation d'un jour à l'autre est insensible : c'est l'époque du premier solstice, ainsi nommé parce que le Soleil s'arrête là dans son mouvement ascensionnel vers le nord. A partir de e, δ commence à croître, le Soleil marche vers le ciel austral ; six mois après, il atteint en e' la limite de son excursion vers le sud : c'est le deuxième solstice. Alors, pour la seconde fois dans l'année, δ reste sensiblement invariable pendant un certain laps de temps, et le Soleil décrit journellement un véritable parallèle, celui du point e. Dans les positions intermédiaires, de e en e' ou de e' en e, la variation de δ en un jour est sensible ; ce ne sont pas de vrais parallèles que le Soleil décrit, mais des spires sphériques très serrées. En γ ou en γ', surtout, cet effet est marqué pour l'astronome, car alors δ varie de $23',4$ par jour.

Pour déterminer l'obliquité ω, cause de ces changements, il suffit de mesurer le δ du Soleil aux époques du maximum et du minimum, et de prendre la demi-différence des valeurs extrêmes.

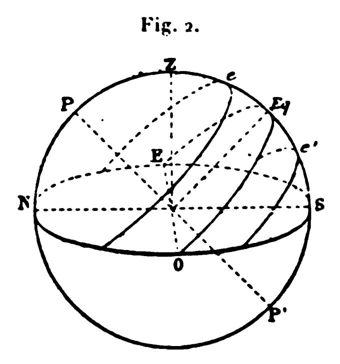
Pour déterminer l'instant où le Soleil traverse l'équateur céleste en γ, c'est-à-dire l'équinoxe de printemps, il faut l'observer au méridien plusieurs jours de suite, vers cette époque, et déterminer, par interpolation entre les δ observés, l'instant où cette coordonnée a été juste de $90°$.

Enfin on détermine la durée de la révolution du Soleil par l'intervalle de deux retours consécutifs de cet astre à un même point de son orbite, par exemple au point γ.

Vicissitudes locales des saisons et des jours.

Quel effet ce lent mouvement annuel du Soleil produit-il sur

Fig. 2.



l'horizon d'un lieu donné? C'est ce que nous montre la *fig.* 2 et la formule de la page 59, tome I,

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \mathcal{H},$$

δ désignant la distance polaire du Soleil et λ la colatitude du lieu.

Lorsqu'on y fait $z = 90°$, pour exprimer que le centre du Soleil est à l'horizon, elle devient

$$\cos \mathcal{H} = -\cot\lambda \cot\delta.$$

Les deux valeurs de $\mathcal{H}$ sont alors les angles horaires du Soleil à l'instant de son coucher et de son lever. Ces angles horaires, exprimés en temps à raison de 1^h pour $15°$, font connaître le temps écoulé entre le lever ou le coucher de l'astre et l'instant de son passage au méridien. Les heures solaires étant comptées de midi et de minuit, selon l'usage civil, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}' - 12^h$ seront les heures du coucher et du lever, pour le jour où la distance polaire est δ. Par exemple, sur le parallèle de Paris, par $41° 10'$ de colatitude, $\mathcal{H} = 4^h$ quand

$\delta = 90^\circ + \omega$, au solstice d'hiver, en sorte que, vers le 20 décembre, le Soleil se couche à 4^h du soir et se lève à 8^h du matin; la durée du jour est de 8^h et celle de la nuit de 16^h. $\mathcal{H} = 8^h$ quand $\delta = 90^\circ - \omega$, au solstice d'été, en sorte que le jour est alors de 16^h et la nuit de 8^h.

Il est aisé de suivre ces variations de climat en climat, c'est-à-dire lorsqu'on considère différentes valeurs de λ. A l'équateur, $\lambda = 90^\circ$; la formule se réduit à $\cos \mathcal{H} = 0$, quel que soit δ. De là $\mathcal{H} = 90^\circ$ ou 6^h. Le jour est donc constamment de 12^h à l'équateur, tandis que, dans les autres climats, cette circonstance ne se présente que deux fois dans l'année, lorsque $\delta = 90^\circ$, c'est-à dire vers le 21 mars et le 21 septembre.

Si $\lambda = \omega$, $\cos \mathcal{H}$ devient 1 lorsque $\delta = 90^\circ - \omega$. Ce jour-là le Soleil rase l'horizon à minuit. C'est ce qui arrive au cap Nord, le 21 juin, au solstice d'été. Sur des parallèles encore plus voisins du pôle, $\cos \mathcal{H}$ devient > 1, et $\mathcal{H}$ imaginaire lorsque $\delta < 90^\circ - \lambda$. Alors il n'y a, pendant quelque temps, ni lever ni coucher du Soleil. Cet astre devient momentanément circompolaire. Il apparaît ou disparaît sur cet horizon suivant les variations annuelles de δ, et non suivant les lois du mouvement diurne.

En réalité, le jour qui nous éclaire commence au lever du bord supérieur du Soleil et non pas du centre. Sa durée est d'ailleurs augmentée par la réfraction qui est d'environ $34'$ à l'horizon. Il faut donc faire dans la formule précédente $z = 90^\circ + 16' + 34'$ pour tenir compte de ces influences, car le demi-diamètre angulaire du Soleil est de $16'$ environ.

Quant au crépuscule qui allonge si notablement la durée de l'éclairement diurne du ciel dans les climats septentrionaux, il cesse lorsque le Soleil est abaissé de 18° au-dessous de l'horizon. Pour obtenir l'angle horaire correspondant, il faudrait faire $z = 108^\circ$ dans la formule précédente.

La distance zénithale méridienne z_m exprime l'angle d'incidence (par rapport à la verticale) des rayons solaires à midi; elle règle donc l'intensité de la chaleur versée à cet instant sur un horizon donné, et, comme elle est en relation directe avec l'angle précédent $\mathcal{H}$, c'est-à-dire avec la durée du jour, on voit que ce simple élément z_m règle et détermine la chaleur versée d'un bout à l'autre de la journée. La température du jour variera d'une époque à

l'autre entre des limites dépendantes de z_m, c'est-à-dire de

$$\delta - \omega - \lambda \quad \text{et} \quad \delta + \omega - \lambda,$$

qui répondent au premier et au deuxième solstice.

Cela posé, si le lieu considéré est sur l'hémisphère boréal, $\lambda < 90°$; le premier angle est en général beaucoup moindre que le second, car la différence 2ω est de $47°$. Le premier solstice, en e, époque des plus longues journées et de l'incidence la plus favorable à l'action des rayons solaires, sera le temps de la plus chaude saison. Le second, en e', marquera la saison du froid et des longues nuits. Aux époques intermédiaires, quand le Soleil est en γ ou γ', le jour a sa valeur moyenne, ainsi que l'incidence des rayons solaires à midi : ce seront, à six mois d'intervalle, les saisons tempérées du printemps et de l'automne. Tout cela est renversé pour $\lambda > 90°$; sur l'autre hémisphère le premier solstice e répond à l'hiver et le deuxième e' à l'été.

Période des saisons; année tropique. Institution du calendrier.

Quelle est la période qui ramène en chaque lieu ces phénomènes si tranchés, si importants pour nous? C'est évidemment l'année tropique ci-dessus définie, non pas la période des retours du Soleil à un même point fixe du ciel tel qu'une étoile, c'est-à-dire la durée de sa révolution sidérale, mais celle de ses retours au point γ ou à un solstice, bien que ces points se déplacent lentement, comme nous le verrons plus tard, dans la suite des siècles. C'est donc aussi l'année tropique qui doit régler les travaux de l'agriculture et en général les occupations journalières des populations fixées au sol.

Cette liaison de la température moyenne de chaque jour de l'année avec les mouvements du Soleil est si intime, qu'on peut la calculer d'avance par la formule

$$\theta + k \cos \delta,$$

δ étant la distance polaire du Soleil, θ et k des constantes relatives à la localité, à la seule condition de prendre pour chaque jour, au lieu du δ actuel, le δ qui répond à une date antérieure d'un

mois, à cause du retard qui se manifeste toujours dans l'effet thermique des rayons solaires. A Paris, par exemple, $\theta_0 = 10°,5$, $k = 20°,8$. Formez le Tableau suivant pour le milieu de chaque mois :

	δ du mois.	20°,8 cos δ (δ du mois précédent).	Température moyenne calculée.	Température moyenne observée.
	°	°	°	°
Janvier.....	111.11	— 8,2	3,3	2,0
Février.....	102.47	— 7,5	3,0	4,0
Mars.......	91.52	— 4,6	5,9	7,0
Avril......	80. 0	+ 0,7	9,8	10,7
Mai..	70.59	+ 3,5	14,0	14,0
Juin........	66.39	+ 6,8	17,3	17,0
Juillet......	68.33	+ 8,2	18,7	18,7
Août.......	76. 8	+ 7,6	18,1	18,2
Septembre..	87.13	+ 5,0	15,5	15,8
Octobre....	98.45	— 1,0	11,5	11,5
Novembre..	108.40	— 3,2	7,3	7,0
Décembre..	113.19	— 6,7	3,8	3,9

et vous verrez jusqu'où va cette concordance entre les dates d'un calendrier bien réglé et la marche annuelle de la température. Or tout produit de la végétation dépend de la chaleur régnante et de la somme de chaleur reçue par le sol depuis l'époque de la germination. Il y a donc une date pour semer, une autre pour récolter, et cela change d'une espèce végétale à l'autre. L'expérience seule, accumulée pendant de longues années, peut faire connaître ces dates qui servent de règle aux cultivateurs, et qui dirigent toute l'économie de populations forcées de demander au sol leur subsistance, tout en préparant leurs ressources pour les époques où le sol chôme. De là les dictons qui expriment ces règles pour les gens simples, tous fondés sur l'usage d'un bon calendrier.

Mais si la durée de l'année solaire a été mal déterminée, cette concordance des dates d'un calendrier et des δ du Soleil ne saurait se maintenir pendant une longue suite d'années. L'histoire nous apprend que les premières sociétés agricoles ont commencé par le calendrier lunaire des nomades, basé sur 12 lunaisons de 354^j. Il a fallu bientôt y renoncer et consulter de plus près le Soleil. On a ensuite porté l'année à 360 jours; mais l'erreur de 5 jours, en s'accumulant d'année en année, devenait de 30 jours ou d'un mois en 6 ans. Alors le mois de mars, par exemple, cessait de répondre,

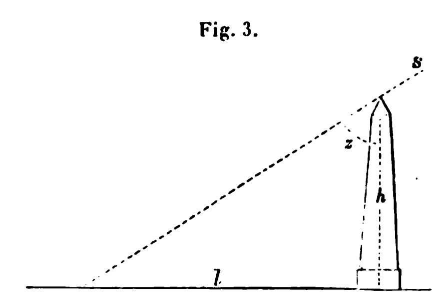
dans nos climats, à la température printanière de $10^o,7$ pour tomber à 7° en moyenne. Au bout de 18 ans, on se trouvait au cœur de l'hiver lorsque le calendrier annonçait le printemps. Pour corriger cet état de choses qui a duré jusqu'en l'an — 1784 en Égypte, et fixer la durée de l'année à 1 jour près, plus tard à $0^j,01$ près, comme le firent les Chinois il y a trois mille ans, on ne pouvait se contenter de noter les levers ou couchers du Soleil; il fallut instituer un ensemble d'observations astronomiques. Nous en dirons quelques mots, car les procédés anciens étaient de tout point comparables aux nôtres.

CHAPITRE II.

ASTRONOMIE SOLAIRE DES ANCIENS.

Elle était basée sur de véritables observations méridiennes. Le gnomon (*fig.* 3) remplaçait notre lunette méridienne et notre cercle mural; la clepsydre remplaçait fort bien nos horloges.

Fig. 3.



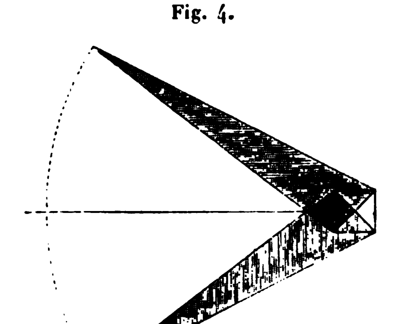
Le gnomon est un style de hauteur connue h, rendu bien vertical à l'aide du fil à plomb; son ombre, portée sur un plan dressé horizontalement à l'aide de rigoles pleines d'eau, donne à tout instant, par sa longueur l, la distance zénithale du Soleil au moyen de la relation

$$\frac{l}{h} = \text{tang}\, z.$$

Si l'on trace sur le sol la direction de la méridienne par la méthode des ombres égales (*fig.* 4), identique à notre méthode des hauteurs correspondantes (t. I, p. 124), on aura un vrai théodolite donnant à volonté, par l'observation de l'ombre, le z et l'A du Soleil. C'est aussi un instrument des passages donnant l'instant où le Soleil passe au méridien. A ce moment, l'ombre du style coïncide avec la méridienne tracée sur le sol; sa longueur donne z_m et par suite δ.

Quant à la mesure du temps, la clepsydre y pourvoyait parfaitement. C'était un réservoir à niveau constant, c'est-à-dire muni d'un trop-plein, où l'on faisait arriver incessamment de l'eau; au bas de ce réservoir, par un orifice convenablement ménagé, sortait une quantité d'eau un peu moindre que la quantité reçue;

Fig. 4.



elle était mesurée par une jauge. Pour régler l'appareil, il suffisait de noter l'eau ainsi débitée, sous une pression constante, dans l'intervalle de deux retours consécutifs du Soleil au méridien, et de la subdiviser en 24 parties égales. La hauteur de l'eau dans la jauge donnait l'heure à tout instant du jour et de la nuit.

Ainsi l'observateur était en état de mesurer, jour par jour, le δ du Soleil au moyen de sa distance zénithale méridienne et, en ajoutant 12 heures à l'instant de sa culmination, de noter à minuit précis les étoiles écliptiques qui se trouvaient alors au méridien à 180° d'ascension droite par rapport au Soleil.

L'obliquité de l'écliptique et la colatitude du lieu s'obtiennent par l'observation des deux solstices:

$$\text{Au solstice d'été} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_m = 90^\circ - \omega - \lambda,$$

$$\text{Au solstice d'hiver} \ldots\ldots\ldots \quad z'_m = 90^\circ + \omega - \lambda,$$

d'où

$$90^\circ - \lambda = \frac{z_m + z'_m}{2}, \quad \omega = \frac{z'_m - z_m}{2}.$$

Vers l'équinoxe, la longueur de l'ombre méridienne diffère peu de $h \cot \lambda$; les distances polaires conclues d'un jour à l'autre sont

voisines de 90°. On en déduit par interpolation l'instant où δ a dû se trouver exactement de 90°.

Les anciens, Chinois, Égyptiens, Grecs, Arabes, et les modernes jusqu'au XVII[e] siècle nous ont légué des observations de ce genre qui jouent, encore aujourd'hui, un rôle intéressant dans la Science.

Mais, pour en tirer parti, il faut leur appliquer une correction fort sensible. Si l'on examine l'ombre portée par le style sur le plan horizontal, on verra qu'elle est bordée d'une pénombre due à ce que le disque du Soleil a des dimensions notables. L'extrémité noire de l'ombre, celle qu'on observait, répond évidemment, non pas au centre du Soleil, mais à son bord supérieur, tandis que l'extrémité de la pénombre, s'il était possible de la distinguer, répondrait au bord inférieur. Il faut donc, pour avoir les distances zénithales du centre, ajouter à celles que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire z_m et z'_m, le demi-diamètre angulaire du Soleil $\frac{1}{2}\Delta$, environ 16' (1). Les équations deviennent alors

$$z_m + \tfrac{1}{2}\Delta = 90^\circ - \omega - \lambda,$$
$$z'_m + \tfrac{1}{2}\Delta = 90^\circ + \omega - \lambda.$$

La correction porte évidemment sur le λ conclu, mais elle disparaît dans le calcul de ω, à moins que, sous le climat de l'observateur, le Soleil ne culmine pas, aux deux solstices, du même côté de la verticale.

L'ombre de l'extrémité du style (il avait une longueur réglementaire de 8 pieds chez les Chinois) étant mal terminée, les Arabes et les modernes ont substitué, à cette extrémité, une plaque percée d'un trou par lequel les rayons du Soleil allaient peindre sur le sol une image passable de cet astre. C'est ainsi qu'est construit le gnomon que Cassini établit à l'Observatoire de Paris, car cet antique instrument était encore en usage en 1667. On en voit un pareil à l'église de Saint-Sulpice.

C'est par ces procédés d'observation que les Chinois, et bien plus tard les Égyptiens et les Grecs, ont réussi à fixer la longueur de l'année, d'abord à 365 jours, puis à 365^j, 24.

---

(1) Naturellement, il faut aussi les corriger de la réfraction dont les anciens ne tenaient pas compte. Voir l'Observation d'Eratosthènes, t. I, p. 241.

Calendriers.

Le second calendrier égyptien comprenait 12 mois de 30 jours et 5 jours complémentaires ou épagomènes. C'est l'année vague. L'erreur d'un quart du jour produisait une erreur de 6 mois, c'est-à-dire un renversement complet des saisons en 730 ans. Le calendrier romain était encore plus mal conçu. En l'an 46 avant J.-C., Jules César, alors pontife suprême, entreprit de le réformer. Sosigènes, astronome d'Alexandrie, qu'il chargea de cette opération, institua une règle simple d'intercalation pour tenir compte de la fraction de jour, ou du moins pour corriger l'erreur dès qu'elle tendrait à s'élever à un jour entier. Cette règle consiste à donner 365 jours à trois années sur quatre et à faire la quatrième de 366 jours ([1]). Cela suppose que l'année est de $365^j,25$. Comme elle est en réalité de $365^j,2422$, l'erreur du calendrier était de $0^j,0078$. Cette erreur ne pouvant atteindre un jour qu'au bout de 128 ans, elle fut considérée comme négligeable.

Le calendrier julien a été adopté par l'église catholique en 325. A cette époque, l'équinoxe du printemps tombait le 21 mars, et, dans la supposition qu'il en serait toujours ainsi, on avait réglé sur cette date la célébration de la fête de Pâques. En 1582, 1257 ans après, l'erreur du calendrier julien devait être de 10 jours environ; l'équinoxe de printemps répondait effectivement au 11 mars. Pour corriger cette erreur de 10 jours, le pape Grégoire XIII décida que le 5 octobre 1582 compterait pour le 15 octobre : c'est ce qu'on a appelé la *suppression des 10 jours*. Et pour parer à l'avenir, c'est-à-dire pour que l'équinoxe de printemps tombât toujours du 19 au 21 mars, il fut décidé qu'on supprimerait 3 bissextiles sur 100 ([2]). De la sorte, notre année civile a pour durée

$$\frac{400 \times 365 + 97}{400} = 365^j,2425.$$

([1]) Toute année dont le millésime est divisible par 4 est bissextile.

([2]) Toute année séculaire dont le millésime n'est pas divisible par 400 reste année commune. Les Russes ont maintenu le calendrier julien. La discordance avec le nôtre est aujourd'hui de douze jours. Le 15 mars chez eux répond à notre 27 mars.

L'erreur, ainsi réduite à $0^j,0003$, est réellement négligeable.

Les mois, alternativement de 31 et de 30 jours, sauf février qui en a 28 ou 29, n'ont plus aucun rapport avec les lunaisons.

En 1793, on établit un nouveau calendrier, dit *calendrier républicain*. L'année se composait de 12 mois de 30 jours divisés en 3 décades. Il y avait 5 jours complémentaires, parfois 6. Mais l'intercalation fut supprimée ; on décida que l'année commencerait par le jour dans le cours duquel tomberait l'équinoxe d'automne. On ajoutait un sixième jour complémentaire quand il le fallait pour suivre, à moins d'un jour près, les mouvements du Soleil, en sorte que l'intervalle des années de 366 jours n'était pas toujours de 4 ans, mais parfois de 5 (par exemple, de la quinzième à la vingtième année de l'ère nouvelle).

Voici la concordance des deux calendriers pour la 1ère année.

Nouveaux mois.	Ancien style.	Nouveaux mois.	Ancien style.
1er Vendém..	22 septembre 1793.	1er Germinal.....	21 mars 1794.
1er Brumaire.	22 octobre »	1er Floréal......	20 avril »
1er Frimaire.	21 novembre »	1er Prairial.....	20 mai »
1er Nivôse...	21 décembre »	1er Messidor....	19 juin »
1er Pluviôse.	20 janvier 1794.	1er Thermidor..	19 juillet »
1er Ventôse..	19 février »	1er Fructidor...	18 août »

Jours complémentaires.		
17	septembre	1794.
18	»	»
19	»	»
20	»	»
21	»	»

Ce calendrier si simple n'a pas eu le sort de la réforme des poids et mesures qui fut entreprise à la même époque : celle-ci répondait à un besoin sérieux et a fini par être universellement adoptée. On remarquera d'ailleurs que les noms trop significatifs des mois étaient au rebours des saisons sur l'autre hémisphère.

Cadrans solaires.

Il restait encore à donner aux populations dépourvues de clepsydres un moyen commode d'avoir l'heure. Les anciens astro-

nomes inventèrent dans ce but les cadrans solaires, pareils à ceux qu'on voit encore aujourd'hui sur quelques-uns de nos monuments, mais dont personne ne fait usage.

Si le gnomon à style vertical est un véritable théodolite et au besoin une lunette méridienne, les cadrans dont le style est incliné parallèlement à l'axe de rotation du ciel sont de véritables équatoriaux.

Les anciens virent bien que l'intervalle de deux passages consécutifs du Soleil au méridien est à peu près constant. Ils divisèrent cet intervalle en deux fois douze heures, dont la numération devait aller d'un midi au minuit suivant et reprendre de ce minuit au midi d'après. Si par un style incliné parallèlement à l'axe de la rotation diurne on imagine vingt-quatre plans, le Soleil, en vertu de cette rotation, passera successivement dans chacun de ces plans et, lorsqu'il sera sur l'horizon, le style y portera son ombre. Recevez cette ombre sur un mur quelconque auquel le style aura été fixé, et sur lequel vous aurez dessiné d'avance les traces d'une dizaine de ces plans horaires espacés de 15° en 15° : ce sera un cadran sur lequel vous lirez l'heure par la seule position de l'ombre du style au milieu des lignes horaires.

Cadran équatorial.

On rencontre encore çà ou là des cadrans de ce genre, le plus simple de tous. Il se compose d'une feuille circulaire de métal divisée sur les deux faces en heures, c'est-à-dire de 15° en 15°, et d'un style perpendiculaire à la plaque. Ce style étant fixé dans la direction de l'axe du monde, on fait tourner la plaque jusqu'à ce que la division de 0^h ou de XII^h se trouve dans la direction du méridien. L'ombre portée par le style marque les heures sur la face supérieure pendant la période de mars à septembre, et sur la face inférieure de septembre à mars, parce qu'alors le Soleil est au-dessous de l'équateur.

Cadran polaire.

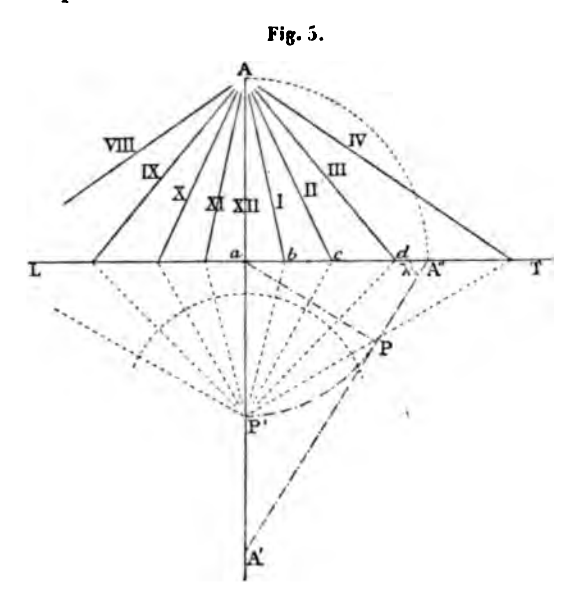
Le plan est parallèle à l'axe du monde; les traces des plans horaires sont parallèles au style. On les détermine en menant au style

un plan perpendiculaire (parallèle à l'équateur) et en marquant sur ce plan les lignes horaires dont on vient de parler. Celles du cadran polaire passeront par les traces de ces dernières sur le plan du cadran.

Cadran vertical.

Le mur étant bien perpendiculaire au méridien du lieu, on y trace avec soin une verticale qui sera la ligne horaire de midi. Soient A le point où le style devra être implanté dans la muraille, LT une horizontale quelconque qu'on prendra pour ligne de terre. On tracera l'épure suivante:

Fig. 3.



A'', rabattement du point A sur le plan horizontal, en faisant tourner A*a* autour du point *a*.

A''A', ligne menée par A'' de manière à faire l'angle λ avec LT; c'est le rabattement du style implanté en A et dirigé dans le plan méridien parallèlement à l'axe du monde.

P*a*, perpendiculaire à A''A', rabattement de la trace de l'équateur sur le méridien A*a*A', l'équateur passant par la ligne de terre LT.

P′, rabattement du point P sur le plan horizontal quand on a fait tourner l'équateur autour de sa trace LT.

P′*a*, P′*b*, P′*c*, ..., lignes horaires du cadran équinoxial rabattu : elles sont espacées de 15° en 15° à partir de P′*a*.

A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, lignes horaires du cadran vertical.

Si le style était prolongé jusqu'au plan horizontal, A′*a*, A′*b*, A′*c*, ..., seraient les lignes horaires d'un cadran horizontal ayant même style.

Cadran vertical déclinant.

A*a*, verticale tracée sur le mur.

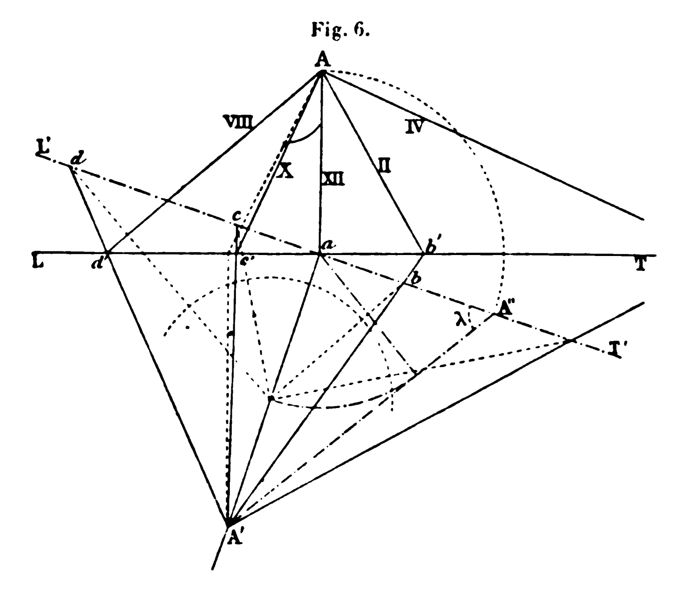
A, point d'insertion du style parallèle à l'axe du monde.

LT, ligne de terre.

*a*A′, méridienne, projection horizontale du style.

L′*a*T′, perpendiculaire à la méridienne.

Fig. 6.



Par la construction précédente on obtient les lignes horaires horizontales, c'est-à-dire les traces A′*a*, A′*b*, A′*c*, ... des plans horaires, et on les prolonge jusqu'à la ligne de terre LT qu'elles coupent en *a*, *b*′, *c*′, *d*′, ...

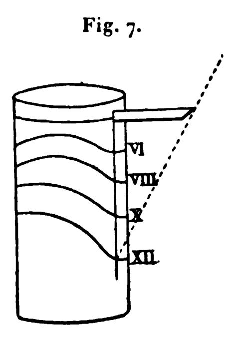
Aa, Ab', Ac', Ad', ..., lignes horaires du cadran déclinant.

Au lieu de construire les épures, il est tout aussi simple de recourir aux formules de Trigonométrie sphérique et d'en calculer les éléments.

Montre des bergers.

Dans le Midi pyrénéen on voit parfois, entre les mains des bergers, un petit cadran de poche basé sur des principes différents. C'est un cylindre en bois sillonné de douze génératrices équidistantes correspondant aux douze mois de l'année, et de quatre ou cinq courbes qui coupent ces génératrices aux heures XII, I, II, ...

Fig. 7.



Pour se servir de ce cadran, on en fait sortir, comme une lame de couteau, une languette de fer qu'on place, normalement au cylindre, sur la ligne du mois actuel. Le cylindre étant bien vertical (il est suspendu à un fil), on le fait tourner jusqu'à ce que le couteau se place dans le vertical du Soleil. L'ombre portée par le couteau tombe alors sur la génératrice correspondant à la date actuelle, et l'extrémité de cette ombre indique l'heure au moyen des courbes horaires.

Pour tracer ces courbes, on calcule de mois en mois les z correspondant aux diverses heures du jour par la formule

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \mathit{H},$$

et l'on obtient ensuite la graduation d'une génératrice par la formule

$$\operatorname{tang} z = \frac{\text{longueur du couteau}}{\text{longueur de l'ombre}}.$$

Ayant fait le même calcul pour les six génératrices d'une demi-année, de mois en mois, on fait passer des courbes par les points correspondant à chaque heure prise en particulier. Ce cadran transportable ne peut servir que pour une colatitude déterminée.

Aujourd'hui les montres sont à vil prix; on trouve aux gares et aux horloges publiques l'occasion de les régler fréquemment; d'ailleurs l'heure solaire vraie que les cadrans fournissent a été remplacée par l'heure solaire moyenne; en sorte que l'art de construire les cadrans est presque tombé en désuétude.

Projection gnomonique.

Disons ici quelques mots d'un système de Cartes dont il a été à peine question dans le premier Volume. Si l'on place le point de vue au centre de la sphère et qu'on mette les détails de la surface en perspective sur un plan tangent en un lieu quelconque, c'est-à-dire sur l'horizon de ce lieu, on aura une carte gnomonique où les grands cercles de la sphère seront représentés par des droites. Par exemple, les méridiens seront des droites divergeant du point de rencontre de la ligne des pôles avec le plan du tableau; les parallèles seront des sections coniques.

L'extrémité de l'ombre portée par un gnomon sur le plan horizontal décrit, dans le cours d'une journée, la trace d'un cône ayant pour axe une parallèle à l'axe du monde menée par le bout du style. Les plans horaires menés par cet axe auront pour traces des droites passant par son point de rencontre avec le plan horizontal. L'ensemble de ces parallèles (ellipses ou hyperboles) et de ces droites concourantes forme précisément le canevas d'une projection gnomonique sur l'horizon du lieu (*voir la fig.* 15).

L'intérêt de ces Cartes, dont les astronomes font quelquefois usage, est dans leur propriété de représenter par des droites les arcs de grand cercle. M. E. de Beaumont, ayant constaté qu'un très grand nombre d'accidents géologiques sont disposés sur notre globe en arcs de grand cercle, formant certaines configurations géométriques, a fait usage de cette projection. Mais comme on ne peut représenter ainsi sur un plan qu'une portion limitée de la sphère, pour avoir une Mappemonde gnomonique

il faut projeter la sphère sur les faces d'un polyèdre circonscrit, puis développer ce polyèdre, ce qui donne à la Mappemonde une singulière discontinuité.

Mouvement du Soleil dans son orbite.

On a vu comment les plus anciens astronomes ont su déterminer fort exactement la position de l'écliptique et la durée de l'année. Il restait à étudier le mouvement du Soleil sur l'écliptique, mouvement qu'on supposait uniforme. Mais, comme cette recherche était alors sans utilité pratique, ils ne s'en occupèrent pas. Les Grecs, le seul peuple ancien qui ait étudié les Sciences pour elles-mêmes, indépendamment de tout intérêt immédiat, ont donné cet indispensable complément à l'Astronomie solaire. Au lieu de rapporter ces mouvements à des coordonnées équatoriales, comme le faisaient les Chinois, ce qui en compliquait singulièrement l'étude, ils adoptèrent une coordonnée plus simple, à savoir l'arc même de l'écliptique compris entre le point γ et la position actuelle du Soleil. Si le mouvement du Soleil était réellement uniforme, comme on l'avait cru de tout temps, sa théorie se réduirait à

$$L = L_0 + nt,$$

L désignant la longitude à la date t, L_0 la longitude à l'origine du temps t, n la vitesse angulaire diurne donnée par

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{360^\circ}{365,242217} = 59'8'',31.$$

Il n'y a là qu'une inconnue L_0, dite *longitude de l'époque*. Supposez qu'en une certaine année, au 1er janvier, l'observation ait donné

$$L = 280^\circ 30';$$

on posera $L_0 = 208^\circ 30'$, et, à la condition de prendre le 1er janvier pour l'origine du temps, on aura la longitude, à une date quelconque, par

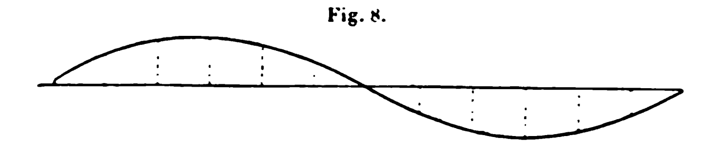
$$L = 280^\circ 30' + (59'8'',31)t.$$

Les astronomes grecs ont comparé cette théorie du mouvement circulaire uniforme avec l'observation. Voici cette comparaison pour le cours d'une année :

Dates		L observées.	L calculées.	Calc. — Obs.
		° ′	° ′	° ′
Janvier	1.....	280.30	280.30	0. 0
	31.....	311. 3	310. 4	— 0.59
Mars	1.....	341.19	339.38	— 1.41
	31.....	11. 9	9.12	— 1.57
Avril	30.....	40.29	38.47	— 1.42
Mai	30.....	69.23	68.21	— 1. 2
Juin	29.....	98. 2	97.55	— 0. 7
Juillet	29.....	126.40	127.29	— 0.49
Août	28.....	155.30	157. 3	— 1.33
Septembre	27.....	184.44	186.37	— 1.53
Octobre	27.....	214.24	216.11	— 1.43
Novembre	26.....	244.39	245.46	- 1. 7
Décembre	26.....	275.10	275.20	— 0.10

Les Grecs étaient parvenus, à l'époque d'Hipparque (150 ans avant J.-C.), à déterminer ces longitudes à $\frac{1}{4}$ de degré près. Or les écarts précédents dépassent notablement cette limite ; de plus, ils affectent une allure systématique. Il fallait donc renoncer à l'hypothèse du mouvement uniforme et chercher la loi de ces écarts. Prenons pour abscisse le temps ou, ce qui revient au même, la longitude calculée qui varie proportionnellement au temps, et les

Fig. 8.



écarts pour ordonnées. La courbe ainsi tracée est une sinusoïde bien caractérisée. En relevant au compas les éléments de cette courbe, on obtient pour la longitude observée l'expression

$$L = L_0 - nt - 1°56' \sin(L_0 - nt - 281°29').$$

Comme cette loi se vérifiait chaque année avec l'exactitude même des observations de l'époque, on dut en admettre la réalité et s'ingénier à lui trouver une explication géométrique.

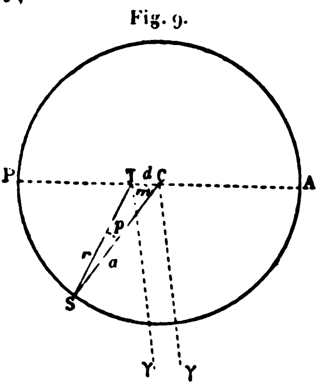
Nous disons *géométrique* et non *mécanique,* car les anciens, frappés de la perpétuité et de la régularité des mouvements célestes, étaient persuadés qu'ils étaient d'une tout autre nature que les mouvements terrestres, lesquels ne tardent pas à s'épuiser. Ils en concluaient que les astres étaient dirigés par des intelligences divines. Or, à de tels êtres, on ne saurait attribuer des mouvements imparfaits, c'est-à-dire autres que circulaires et uniformes (1). Hipparque parvint à tout concilier en supposant que la Terre ne se trouve pas exactement au centre du cercle que le Soleil doit parcourir d'un mouvement parfaitement uniforme.

Hypothèse de l'excentrique.

Soient

C le centre de l'orbite solaire;
T la Terre;
S le Soleil à la date t;

Fig. 9.



Tγ ou Cγ la direction initiale (celle du point vernal) à partir de laquelle se comptent les longitudes, suivant qu'on les calcule pour le centre de l'orbite ou pour la Terre.

La longitude du Soleil vu du centre C sera bien, à la date t,

$$\gamma CS = L_0 + nt;$$

---

(1) « Quoniam, » dit Copernic lui-même, « ab utroque abhorret intellectus; essetque indignum tale quiddam in illis existimari. » (*De Revolutionibus*, etc., p. 3.)

mais la longitude vue de la Terre sera

$$\Upsilon TS = L_0 + nt - p,$$

p étant un petit angle dépendant de l'excentricité TC. Nommons ϖ la longitude du rayon CTP sur lequel la Terre est placée, a le rayon CS, r le rayon vecteur variable TS, d l'excentricité TC. Les formules de transformation des coordonnées pour le déplacement d'origine de C en T donneront

$$r \sin p = d \sin m,$$
$$r \cos p = a - d \cos m,$$

en appelant m l'angle $PCS = \Upsilon CS - \varpi = L_0 + nt - \varpi$, d'où, en posant $e = \frac{d}{a}$,

$$\tang p = \frac{e \sin m}{1 - e \cos m},$$
$$\frac{r}{a} = \sqrt{1 - 2e \cos m + e^2}.$$

En développant en série, on pourra se borner au premier terme parce que e est petit, et écrire

$$L = L_0 + nt - e \sin m,$$
$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos m.$$

Dans le cas précédent, la valeur maximum de $e \sin m$ est de $1°56'$. Telle est donc aussi la valeur de e. Si on l'exprime en parties du rayon pour la faire figurer dans l'expression de $\frac{r}{a}$, on devra écrire $\frac{1°56'}{3438'} = \frac{116}{3438} = \frac{1}{30}$ à peu près. Les formules du mouvement du Soleil seront donc

$$(1) \qquad L = L_0 + nt - 1°56' \sin m,$$

$$(2) \qquad \frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{30} \cos m.$$

Détermination de l'excentricité et de la longitude du périgée.

Le point P le plus voisin de la Terre porte le nom de *périgée;* le point A est l'apogée; le rapport $\frac{TC}{CP}$ est l'excentricité e. Ce sont là deux nouveaux éléments introduits par la théorie de l'excentrique. L'expression de la longitude dans cette hypothèse

$$L = L_0 + nt + e \sin(L_0 + nt - \varpi)$$

contient donc quatre constantes :

L_0, longitude *moyenne* à la date prise pour origine, c'est-à-dire à la date $t = 0$ (¹);
n, moyen mouvement diurne, si t est exprimé en jours;
e, excentricité de l'orbite solaire;
ϖ, longitude du périgée P.

Toutes ces longitudes se comptent à partir de Tγ dans le sens direct.

Nous avons déjà vu comment on détermine la durée T de la révolution par rapport au point γ. On en déduit $n = \frac{360^\circ}{T}$. Il ne reste donc plus à déterminer que les trois constantes L_0, e, ϖ qui figurent dans l'expression de la longitude du Soleil.

Cette théorie est au fond identique à celle que nous avons exposée (t. I, p. 82), pour l'erreur d'excentricité dans les cercles divisés servant à la mesure des angles. En suivant les indications de ce paragraphe, il est facile de voir qu'on éliminerait le terme en e en prenant la moyenne de deux longitudes L, L' à deux dates t, t' telles que $n(t' - t) = 180^\circ$. Cette moyenne est en effet

$$\tfrac{1}{2}(L + L') = L_0 + \tfrac{1}{2}(t + t')n,$$

et elle fera connaître L_0. On obtiendra ϖ en cherchant dans une série d'observations, s'étendant à l'année entière, deux longitudes L et L + 180°, dont les dates t et t' aient pour différence $\frac{1}{2}$ T. La seule droite tirée par T, qui partage en parties égales l'orbite sur laquelle le Soleil est supposé se mouvoir d'un mouvement uniforme, est en effet la droite PA. Alors l'une de ces deux

(¹) La longitude vraie, à cette époque $t = 0$, serait $L_0 + e \sin(L_0 - \varpi)$

longitudes sera celle du périgée, l'autre celle de l'apogée. Enfin les observations faites vers l'époque où m, c'est-à-dire $L_0 + nt - \varpi$ est $90°$ ou $270°$, seront très propres à faire connaître l'excentricité exprimée en arc.

Il est préférable de déterminer simultanément ces trois constantes, en formant, avec un grand nombre de longitudes observées à des époques quelconques t, t', t'', ..., des équations de la forme

$$L = L_0 + nt + x \cos nt + y \sin nt,$$

dans lesquelles

$$x = e \sin(L_0 - \varpi), \quad y = e \cos(L_0 - \varpi).$$

Après avoir résolu ces équations par la méthode des moindres carrés, on déduira e et $L_0 - \varpi$ des valeurs obtenues pour x et y.

Nous verrons une application de ce genre de calculs dans la théorie du sextant.

Hipparque a trouvé, par un procédé quelconque,

$$T = 365^j{,}2467, \quad \varpi = 245°30', \quad e = 2°23' = \tfrac{1}{24}.$$

Les vraies valeurs à cette époque étaient

$$T = 365^j{,}2423, \quad \varpi = 246°25', \quad e = 2°1',$$

Ce qui précède donne une idée fort exacte des habitudes de calcul des astronomes. Pour représenter une variable qui ne procède pas tout à fait proportionnellement au temps, ils la décomposent en deux parts, l'une variant uniformément, l'autre généralement bien moindre, mais périodique. Ainsi, pour égaler la partie uniforme de la longitude, c'est-à-dire $L_0 + nt$, à la coordonnée réelle L, il faut lui ajouter une petite quantité périodique $e \sin m$, qu'ils appellent *équation du centre;* elle s'exprime en arc, à la condition convertir en arc le nombre abstrait e (en le multipliant par $206265''$ ou $3438'$). Quand $m = 90°$, l'équation du centre atteint son maximum. C'est ainsi que $1°55'$ était et est encore désigné sous le nom de *plus grande équation du centre.*

Les anciens voyaient bien que, pour démontrer la réalité de leur hypothèse, il ne suffisait pas d'établir que les longitudes observées du Soleil étaient très approximativement représentées par la for-

mule ([1]); il aurait fallu, en outre, qu'il en fût de même des rayons vecteurs, c'est-à-dire que les variations de distance du Soleil à la Terre répondissent à la formule (2), page 24. Mais, pour effectuer ce contrôle, on aurait dû mesurer de jour en jour le diamètre apparent du Soleil. On a, en effet, en représentant par ι le rayon du Soleil,

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\iota}{r},$$

en sorte que les diamètres observés sont sensiblement réciproques aux rayons vecteurs r; mais les anciens n'ont jamais pu effectuer de telles mesures, qui exigent l'application des lunettes aux instruments de mesure.

Le fait est que cette hypothèse de l'excentrique satisfait aux longitudes du Soleil. Nous verrons bientôt que les anciens l'ont étendue à toutes les planètes et même à la Lune. Admettre cependant une excentricité quelconque dans l'orbite, c'était déroger singulièrement à la règle qui ne permettait d'attribuer aux astres que des mouvements parfaits. Pour répondre à ceux qui auraient accepté difficilement ce défaut de centrage dans les mouvements célestes, les Grecs faisaient remarquer que leur combinaison revenait à faire circuler le Soleil uniformément et en sens rétrograde sur un petit cercle de rayon égal à TC, nommé *épicycle*, tandis que le centre de ce petit cercle parcourrait un cercle plus grand autour de la Terre, dans le même temps, et en sens direct. L'épicycloïde ainsi engendrée se réduit effectivement à un cercle avec une excentricité égale au rayon de l'épicycle ([1]).

([1]) Faisons ici une distinction importante. Les épicycloïdes que nous avons considérées dans l'introduction du tome I ont une autre génération. Le mobile se meut sur l'épicycle avec une vitesse angulaire n, mais ce cercle se transporte dans l'espace *sans tourner*, de manière que son centre parcourt le déférent avec la vitesse angulaire n', ces deux mouvements étant de même sens. Dans l'exposé ci-dessus, nous avons adopté la définition des anciens. Ils supposaient l'épicycle fixé matériellement à un rayon du déférent. Alors ce rayon, tournant avec la vitesse n', imprimait déjà à l'épicycle, sur lui-même, une rotation de même sens et de même vitesse. Mais le résultat sera le même si, comme le faisaient les anciens, on imprime au mobile, sur son épicycle, une vitesse angulaire égale non plus à n, mais à $n - n'$. Dans le cas actuel, les anciens donnaient au Soleil une vitesse $-n'$, égale et contraire par conséquent à celle du centre de son épicycle sur la circonférence du déférent. Nous retrouverons cette distinction dans la théorie des planètes.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU MOUVEMENT ANNUEL DU SOLEIL PAR LES MODERNES.

On observe chaque jour le Soleil à son passage au méridien, au moyen de la lunette méridienne et du cercle mural, absolument comme une étoile ; seulement, comme il a un disque très considérable, on n'observe que les bords. H étant l'heure sidérale du passage du premier bord au méridien (moyenne des cinq fils) et H' celle du passage du second bord, il est évident que

$$\text{Æ centre} = \frac{H + H'}{2}.$$

Pendant que le centre passe au méridien, on mesure successivement, au cercle mural, la distance zénithale du bord supérieur et celle du bord inférieur. Celles-ci étant dûment corrigées de la réfraction, on a

$$\text{dist. zén. centre} = \frac{z + z'}{2}, \quad \delta = \lambda + \frac{z + z'}{2}.$$

Diamètre apparent du Soleil.

Le demi-diamètre vertical se déduit immédiatement des mesures précédentes ; il est

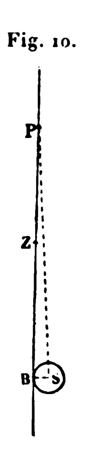
$$\frac{z' - z}{2}.$$

Le demi-diamètre horizontal se déduit de la différence H' — H

des heures sidérales du passage de chaque bord par le méridien.

Soient PZ le méridien projeté sur l'horizon, S le centre du So-

Fig. 10.



leil, BS le rayon perpendiculaire au méridien, PS le cercle horaire du point S; le triangle PSB, rectangle en B, donne

$$\frac{\sin SB}{\sin P} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta}{\sin \frac{H'-H}{2}} = \sin \delta$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{H'-H}{2} \sin \delta.$$

Mais, pour réduire $\frac{H'-H}{2}$ en arc, on ne devra plus le multiplier par 15, car le Soleil est animé d'un mouvement propre de sens contraire à celui du ciel; il ne décrit pas $15''$ en 1^s de temps sidéral, comme les étoiles fixes, mais $15'' - \partial Æ$, $\partial Æ$ étant la petite variation de son Æ pour 1^s. On devra donc multiplier le temps par $15 - \partial Æ$ ou $15\left(1 - \frac{\partial Æ}{15}\right)$ pour le réduire en arc.

Par exemple, le 1er janvier 1881, on a trouvé $\frac{H'-H}{2} = 1^m 11^s,09$; la distance polaire était de $113^\circ 3'$. Calculer le demi-diamètre horizontal qui résulte de cette observation.

Au 1er janvier, à midi, la *Connaissance des Temps* donne $11^s,03$ (¹) pour la variation horaire de Æ; ∂Æ est donc égal à $\frac{11^s,02 \times 15}{3600}$;

$$1 - \frac{\partial Æ}{15} = \frac{3588,98}{3600}.$$

log 71",09	1,85181
log sin δ	9,96387 — 10
log 15"	1,17609
log 3589	3,55497
C' log 3600	6,44370 — 10
	2,99044

$$\tfrac{1}{2}\Delta = 978'',23 = 16'\,18'',23.$$

On trouve sensiblement le même nombre pour le diamètre vertical, et, comme cette égalité se maintient toute l'année, on en conclut que le Soleil est sphérique.

Le demi-diamètre apparent est lié à la distance D du Soleil à la Terre et au rayon r du Soleil par

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{r}{D} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\Delta = 206\,265''\,\frac{r}{D};$$

il varie donc en raison inverse de la distance. Cette variation est périodique. Fin juin on trouve $\Delta = 31'28''$ ou $32' - 32''$, fin décembre $32' + 32''$; par conséquent, la distance D varie elle-même d'environ $\pm \frac{1}{60}$, à peu près comme les nombres $1 - \frac{1}{60}$ et $1 + \frac{1}{60}$. Le Soleil est donc plus voisin de nous de $\frac{1}{30}$ à peu près en hiver qu'en été.

Parallaxe du Soleil.

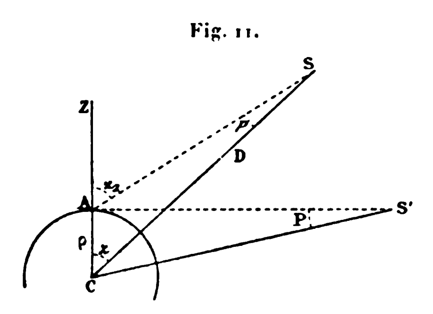
Les théories astronomiques se rapportent au centre de la Terre, tandis que les observations se font en quelque point de la surface. Pour passer de l'un à l'autre il faut opérer ici une véritable transformation de coordonnées par changement d'origine. Quand il

---

(¹) La *Connaissance des Temps* donne $11^s,05$ pour 1 heure de temps moyen. Pour 1 heure de temps sidéral ce sera $11^s,05 \times \frac{365,2422}{366,2422} = 11^s,03$.

s'agit d'observations méridiennes, le changement d'origine se fait, de A, station de l'observateur, en C, centre de la Terre, sur la verticale CAZ, dans le plan même du méridien. Ce déplacement affectera donc la distance zénithale, mais il ne modifiera en rien l'heure du passage au méridien, puisque ce dernier plan contient à la fois

Fig. 11.



la station A et le centre C de la Terre. C'est évidemment le cas inverse de celui qui a été traité à la page 52. Désignons par z_1 la distance zénithale observée en A, par z la distance zénithale correspondante en C, par p la différence ou la *parallaxe* de ces deux directions; il faudra remplacer l'équation (2) de la page 53 du tome I par

$$D \sin p = \rho \sin z_1,$$

D étant le rayon vecteur exprimé en mètres; on en conclut

$$p = 206\,265'' \frac{\rho}{D} \sin z_1.$$

Si le Soleil était à l'horizon, on aurait $z_1 = 90^\circ$ et la parallaxe serait horizontale. En la désignant par π, on aura

$$\sin \pi = \frac{\rho}{D} \quad \text{ou} \quad \pi = 206\,265'' \frac{\rho}{D}.$$

La parallaxe horizontale du Soleil est ainsi l'angle sous lequel on verrait, du Soleil, le demi-diamètre de la Terre. On trouvera plus tard que $\pi = 8'',813$. Par suite,

$$p = 8'',81 \sin z_1.$$

On est donc en état de réduire au centre de la Terre la distance

zénithale z_1 observée en A, car

$$z = z_1 - p,$$

z_1 étant ici la demi-somme des distances zénithales des deux bords supérieur et inférieur du Soleil, corrigées chacune de la réfraction. Dès lors, chaque observation méridienne du Soleil fournira les deux coordonnées Æ et δ du centre de cet astre rapportées au centre de la Terre, à savoir

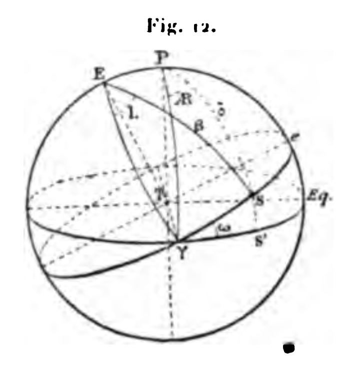
$$Æ = \frac{H + H'}{2}, \quad \delta = z_1 - p + \lambda.$$

Nous avons considéré ici la Terre comme une sphère; cela suffit pour le Soleil, à cause de sa très grande distance qui rend les corrections de parallaxe fort petites. Nous tiendrons compte de l'aplatissement quand il s'agira d'astres plus voisins de nous, tels que la Lune, Vénus et Mars; alors (ρ) désignera le rayon équatorial de la Terre exprimé en mètres.

Coordonnées écliptiques.

Puisque le Soleil se meut dans le plan de l'écliptique, il est naturel de le rapporter à un système de coordonnées ayant pour axe une normale à ce plan. Sur la *fig.* 12, P est le pôle nord de l'é-

Fig. 12.



quateur, E le pôle voisin de l'écliptique, γ le nœud ascendant de l'écliptique sur l'équateur (point vernal), S un point quelconque

de la sphère céleste projetée sur le plan de la figure. Les coordonnées équatoriales de S seront

$$\gamma \mathrm{PS} = Æ,$$
$$\mathrm{PS} = \delta.$$

Les coordonnées écliptiques que nous voulons introduire seront pareillement

$\gamma \mathrm{ES} = \mathrm{L}$, longitude,
$\mathrm{ES} = \beta$, distance au pôle de l'écliptique.

Les longitudes se comptent, comme les Æ, de 0° à 360° dans le sens direct.

L'angle des axes de ces deux systèmes sera

arc $\mathrm{PE} = \omega$, obliquité de l'écliptique.

Les formules de transformation s'obtiendraient en changeant, dans celles du t. I, page 58, B, *a*, A, *b*, *c* en L, β, Æ, δ, ω, si les angles dièdres L et Æ étaient comptés à partir du plan EP des deux axes; mais, conformément aux usages établis par les Grecs, on les compte à partir des plans perpendiculaires à PE, à savoir Eγ et Pγ, et cela parce qu'on a voulu prendre γ pour origine des Æ et des L quand on remplace ces angles dièdres par des arcs de l'équateur ou de l'écliptique qui leur servent de mesure. Il faudra donc mettre L — 90° et Æ — 90° à la place de B et de A. On a ainsi

$$\cos\beta = \cos\omega\cos\delta - \sin\omega\sin\delta\sin Æ,$$
$$\sin\beta\sin\mathrm{L} = \sin\omega\cos\delta + \cos\omega\sin\delta\sin Æ,$$
$$\sin\beta\cos\mathrm{L} = \sin\delta\cos Æ.$$

Pour la transformation inverse, il suffit de permuter les lettres et de remplacer ω par — ω :

$$\cos\delta = \cos\omega\cos\beta + \sin\omega\sin\beta\sin\mathrm{L},$$
$$\sin\delta\sin Æ = -\sin\omega\cos\beta + \cos\omega\sin\beta\sin\mathrm{L},$$
$$\sin\delta\cos Æ = \sin\beta\cos\mathrm{L}.$$

Pour le Soleil qui se meut sur l'écliptique, β = 90°. La première

relation devient

$$\sin \text{Æ} = \cot\omega \cot\delta;$$

les deux dernières donnent

$$\tang \text{Æ} = \cos\omega \tang L$$

et la quatrième se réduit à

$$\cos\delta = \sin\omega \sin L.$$

On trouverait directement ces trois dernières formules en considérant le triangle $\gamma SS'$, rectangle en S', dans lequel γS est la longitude du Soleil, $\gamma S'$ son ascension droite, SS' le complément de sa distance polaire δ.

Détermination de l'obliquité ω.

Au solstice d'été, la distance polaire du Soleil atteint son minimum $90^\circ - \omega$; elle ne varie pas, ce jour-là, d'une demi-seconde en vingt-quatre heures. Par conséquent une observation méridienne du Soleil, encore bien qu'elle ne soit pas faite, ce jour-là, juste à l'instant du solstice, donnera pourtant ω avec une grande exactitude.

Au solstice d'hiver, $\delta = 90^\circ + \omega$: la différence de ces deux distances polaires du Soleil, observées l'une vers le 21 juin, l'autre vers le 21 décembre, donnera donc le double de ω. De plus, toute erreur constante qui affecterait également les δ ou les z (une erreur sur la colatitude, par exemple) se trouverait éliminée, et n'aurait aucune influence sur l'ω conclu des observations faites aux deux solstices à la fois.

Cette remarque a son importance; presque tous les modes d'observation, la plupart des instruments, sont exposés à des erreurs de cette nature. Tels sont surtout les instruments répétiteurs (t. I, p. 106). Nous venons de voir qu'il en est de même des gnomons qui donnaient, aux anciens observateurs, des z trop petits de tout le demi-diamètre du Soleil, c'est-à-dire de 16'. Cette erreur disparaît dans la détermination de ω.

Il est facile d'y faire concourir des observations voisines de l'é-

poque du solstice au moyen de la formule

$$\sin Æ = \cot\omega \cot\delta;$$

mais les Æ du Soleil interviennent alors, et elles ne seront exactement connues que lorsque nous aurons déterminé la position du point γ. Heureusement, près des solstices, l'Æ du Soleil est voisine de 90° ou de 270°; sin Æ varie donc alors fort peu, et une petite erreur sur cette coordonnée sera presque sans influence sur ω.

Si l'on détermine ainsi ω pendant une suite d'années, on constate que cet élément n'est pas tout à fait constant. Il diminue peu à peu à raison de 48″ par siècle, et présente en outre une petite oscillation de ± 9″, fort lente en vérité puisque la période est de 18 $\frac{1}{2}$ ans. Cette dernière est un phénomène de nutation.

Détermination du point γ.

L'origine des Æ étant inconnue, on en est réduit à régler la pendule sidérale sur les passages au méridien de quelque belle étoile visible de jour et de nuit, de Procyon, par exemple, de sorte qu'à cet instant la pendule marque $0^h 0^m 0^s$. On n'observe ainsi que des ascensions droites provisoires, comptées à partir du méridien céleste de Procyon. Nous les désignerons par (Æ).

Si α représente l'ascension droite inconnue de Procyon (comptée à partir du point γ), au passage de Procyon la pendule sidérale devrait marquer α et non $0^h 0^m 0^s$. Ainsi, lorsque nous aurons déterminé une fois pour toutes cette inconnue α, il suffira de l'ajouter à toutes les indications de la pendule pour avoir l'heure sidérale, ou à toutes les (Æ) provisoires des astres observés pour en avoir les Æ. En d'autres termes,

$$Æ = (Æ) + \alpha.$$

Or l'Æ du Soleil peut s'obtenir, indépendamment de la lunette méridienne, de la pendule sidérale et de l'inconnue α, par la simple mesure d'un δ du Soleil, et cela au moyen de l'équation

(1) $$\sin Æ = \cot\omega \cot\delta,$$

dans laquelle ω est désormais connu. Si donc, au moment où on observe le passage du Soleil à la lunette méridienne pour en déterminer l'(Æ), on mesure son δ au cercle mural, on aura immédiatement α par

$$\alpha = Æ - (Æ),$$

et, par suite, on aura les ascensions droites absolues de tous les astres observés, en ajoutant cet α à leurs ascensions droites provisoires.

Le meilleur moyen de déterminer exactement cette importante valeur de α c'est de choisir une époque de l'année où une erreur donnée sur δ ait le moins d'influence sur l'Æ conclue par (1). Cette relation donne

$$dÆ = -\cot\omega \frac{d\delta}{\sin^2\delta \cos Æ};$$

par conséquent l'époque la plus favorable est celle des équinoxes. Alors en effet $\sin\delta = 1$, $\cos Æ = \pm 1$, et comme $\cot\omega = 2,3$, une erreur de $1''$ sur δ n'en produira qu'une de $2'',3$ ou de $0^s,153$ sur α. Remarquez que, si cette erreur est positive à l'équinoxe de printemps, elle sera négative à l'équinoxe d'automne, à cause du changement de signe de cos Æ. Il y aura donc tout avantage à combiner des observations faites à deux équinoxes opposés : la moyenne des valeurs ainsi obtenues pour α sera exempte de toute erreur constante commise sur les δ.

Ici encore on étendra les observations au delà des époques les plus favorables, parce qu'aux équinoxes $d\delta$ varie fort peu et que son dénominateur diffère assez peu de sa valeur maximum pendant un mois entier.

Si l'on détermine ainsi d'année en année la position du point ♈ en le comparant, par l'intermédiaire du Soleil, à une même étoile telle que Procyon, on trouve que α, ascension droite absolue de Procyon, n'est pas invariable. Elle augmente progressivement de $3^s,2$ ou de $48''$ par an. Procyon étant une étoile fixe, il faut bien admettre que c'est le point ♈ qui se déplace ainsi d'année en année. Nous verrons en effet, dans le chapitre de la précession, que la ligne des pôles est animée d'un très lent mouvement conique autour de l'axe de l'écliptique, en vertu duquel la trace de l'équateur mobile sur l'écliptique fixe rétrograde de $50'',2$ par an ; mais nous n'en par-

lons ici que dans le but d'établir tout à l'heure une distinction importante entre la révolution du Soleil par rapport à un point fixe tel que Procyon, et sa révolution par rapport au point mobile γ.

Détermination simultanée de l'obliquité et du point vernal.

Le plan de l'écliptique n'est pas absolument fixe. La théorie des perturbations planétaires permet d'en calculer les très lents déplacements séculaires et de rapporter les coordonnées des astres à l'écliptique d'une certaine époque considérée comme fixe. Il reste pourtant à examiner si, après avoir tenu compte de toutes les influences extérieures, le Soleil se meut dans le plan de cette écliptique sans en dévier nulle part d'une manière sensible. Soient ω' et α' les données qui déterminent ce plan d'après les observations des solstices et des équinoxes. Dans le cas où le Soleil s'en écarterait, dans les positions intermédiaires, les petits écarts, vus de la Terre, seront mesurés perpendiculairement à ce plan par le complément de la coordonnée β. On les calculera donc par la formule

$$\cos\beta = \sin(90^\circ - \beta),$$

ou simplement $90^\circ - \beta$, c'est-à-dire par

$$\cos\omega'\cos\delta - \sin\omega'\sin\delta\sin[(\text{Æ}) - \alpha'].$$

Si la totalité de ces écarts était imputable à l'erreur des éléments adoptés ω' et α', ils auraient pour expression

$$-(\sin\omega'\cos\delta + \cos\omega'\sin\delta\sin\text{Æ})\,\partial\omega + \sin\omega'\sin\delta\cos\text{Æ}\,\partial\alpha.$$

$\partial\omega$ et $\partial\alpha$ étant les corrections des éléments adoptés ω' et α'. En comparant ces termes à ceux des formules précédentes de transformation, on voit que les équations de condition auront la forme

$$90^\circ - \beta + \cos L\,\partial\omega - \sin\omega\sin L\,\partial\alpha = 0.$$

On formerait un grand nombre d'équations de condition de ce genre au moyen d'observations prises dans toutes les régions de

l'orbite solaire : en les traitant par la méthode de Legendre on obtiendrait les valeurs les plus probables des corrections $\partial\omega$ et $\partial\alpha$, celles qui réduisent au minimum la somme des carrés des écarts estimés perpendiculairement au plan de l'écliptique ; puis, par substitution dans ces équations mêmes, on aurait des résidus dont l'examen permettrait de décider la question. L'examen attentif de ces résidus fera voir que, sauf une légère oscillation mensuelle d'une seconde, de part et d'autre de l'écliptique, dont la théorie de la Lune nous donnera la raison et la loi, il n'y a que l'effet ordinaire des erreurs fortuites d'observation. Et ici la méthode des moindres carrés est pleinement applicable, les conclusions qu'on en tire ont leur pleine portée, parce que nous aurons tenu compte de toutes les actions extérieures accessibles à la théorie et appréciables par l'observation. Rien n'est donc mieux établi que cette conclusion que nous formulerons dans le langage de la réalité : l'orbite que la Terre décrit annuellement est plane et son plan passe par le centre du Soleil. Nous avons dû insister longuement sur cette question, une des plus importantes et des plus délicates de l'Astronomie.

Détermination d'un équinoxe.

Supposons qu'on ait fait, à Paris, en 1882, les observations suivantes du passage du Soleil au méridien :

Dates.	Heure sidérale de l'observation.	Distance polaire.	Différences premières.	Différences secondes.
	h m s	° ′ ″	′ ″	″
Mars 19...	23.55.35	90.28.44,2	— 23.42,4	
20...	23.59.14	90. 5. 1,8	— 23.41,6	0,8
21...	0. 2.52	89.41.20,2	— 23.40,5	0,9
22...	0. 6.30	89.17.39,7		

L'équinoxe aura eu lieu au moment où le δ du Soleil a été juste de 90°. Le 20 mars, il ne s'en fallait que de 5′1″,8 ou de 301″,8. On obtiendra cet instant par interpolation. Comme les différences secondes sont très petites, nous nous contenterons d'interpoler par une simple règle de trois entre les observations du 20 et du 21. L'intervalle est de $1^j 3^m 38^s$ ou de 86618^s. Pendant ce temps δ a varié de 23′41″,6, ou de 1421″,6. Cela donne 1″ de variation

pour $60^s,860$ de temps écoulé. On aura donc pour $301'',8$, $301,8 \times 60^s,86 = 5^h 6^m 29^s$ sidérales ou $5^h 5^m 49^s$ de temps solaire moyen. Or on verra plus tard que l'observation du 20 a été faite à $0^h 7^m 34^s$ de temps moyen. En ajoutant l'intervalle ci-dessus, on a $5^h 13^m 23^s$ pour l'époque de l'équinoxe.

Avec quel degré d'exactitude peut-on compter sur ce résultat? L'erreur probable d'une distance zénithale du Soleil observée au méridien, par suite celle d'un δ étant d'environ $\pm 1''$, l'erreur probable de l'équinoxe sera de $\pm 60^s,86$ ou d'environ 1^m. A l'époque d'Hipparque ou de Ptolémée, les observations relativement grossières ne pouvaient donner la date d'un équinoxe qu'à quelques heures près.

Année tropique.

Si l'on a déterminé, en deux années consécutives, les dates de l'équinoxe de printemps, leur différence donnera la durée de la révolution du Soleil par rapport au point γ, c'est-à-dire la durée de l'année tropique. L'erreur probable étant de 1^m pour chacune de ces déterminations, celle de leur différence sera de $1^m \times \sqrt{2} = 1^m,4$ ou de 84^s. Du temps de Ptolémée, l'incertitude devait être de bien près d'un quart de jour.

Il existe un moyen, analogue à la répétition, d'atténuer considérablement l'erreur qui affecterait la durée de l'année tropique si on la déterminait ainsi par deux équinoxes consécutifs : c'est de comparer des équinoxes séparés par un grand nombre d'années. En remontant aux observations de Lacaille et de Bradley, presque aussi précises que les nôtres, on a 130 ans. L'erreur sera encore ici de 84^s sur cette durée totale, puisque les termes extrêmes en sont seuls affectés; mais pour en déduire la longueur de l'année il faudra diviser cette durée totale par 130; l'erreur, divisée aussi par 130, se réduira à $0^s,6$. On obtient encore mieux si l'on fait intervenir dans ce calcul les équinoxes de deux groupes d'années. Le tableau suivant montre avec quelle précision on a réussi, à diverses époques, à déterminer cet élément capital pour l'institution du calendrier et pour toutes les sciences.

Époque.		Année tropique j h m s
De temps immémorial en Chine		365.6. 0. 0
— 150	Hipparque	365.5.55.12
+ 880	Albatégnius (arabe)	365.5.46.30
1230	le roi Alphonse (de Castille)	365.5.49.16
1602	Tycho Brahé	365.5.48.46
1758	Lacaille	365.5.48.49
1828	Bessel	365.5.48.48
1853	Hansen	365.5.48.46,15
1858	Le Verrier	365.5.48.46,045

Nous adopterons le dernier nombre, lequel donne $365^j,242217$. L'incertitude ne porte que sur le dernier chiffre, et ne dépasse peut-être pas une unité de cet ordre. Nous verrons plus loin qu'il a été obtenu par un procédé bien préférable à celui que nous venons d'indiquer

Jours solaires vrais et moyens.

On vient de voir que l'intervalle de deux retours consécutifs du Soleil au méridien était, en mars, de $24^h 3^m 38^s$ sidérales. Cette durée n'est pas tout à fait constante, car, en répétant les mêmes observations en décembre, on trouve $24^h 4^m 27^s$. Elle varie un peu, entre ces limites-là, d'une année à l'autre. Mais ces petites variations, fort importantes d'ailleurs, car elles tiennent en partie au défaut d'uniformité du mouvement du Soleil dans son orbite, sont périodiques : elles se reproduisent chaque année. Elles n'en rendent pas moins le jour solaire vrai impropre à la mesure exacte du temps. Il y a donc lieu de le remplacer par un jour solaire moyen, qui serait la moyenne de tous les jours d'une même année. La durée exacte du jour solaire moyen que nous prendrons pour unité sera donnée, comme on l'a dit déjà, par la relation

$$366,242217 \text{ jours sidéraux} = 365,242217 \text{ jours solaires moyens.}$$

Par suite,

1^j sol. moy. $= 24^h\ 3^m 56^s,555$ de temps sidéral,

1^j sidéral $= 23^h 56^m\ 4^s,091$ de temps solaire moyen.

Ainsi, quand on a besoin d'introduire dans un calcul la durée de

la rotation de la Terre, exprimée avec l'unité courante, c'est-à-dire en secondes de temps moyen, il faut prendre $86164^s,091$.

La durée de l'année tropique n'est pas absolument constante. Elle subit, par le fait des perturbations diverses, de petites fluctuations dont l'amplitude varie entre les limites fort étroites de $\pm 50^s$. Mais quand on détermine l'année, comme nous venons de le dire, par un laps de temps considérable, ces inégalités périodiques s'annulent d'elles-mêmes en passant plusieurs fois du positif au négatif; la durée ainsi obtenue est donc exempte de ces irrégularités.

Cependant, comme le mouvement lentement rétrograde du point γ est de la forme $at + bt^2$, b étant excessivement petit, mais non pas nul, on ne peut pas le considérer comme absolument uniforme. L'année tropique varie donc quelque peu, dans la suite des siècles. Nous verrons, au chapitre de la précession, qu'elle était, au temps d'Hipparque, plus longue de 11^s que de nos jours. La durée du jour solaire moyen pris pour unité est constante, en supposant du moins que la rotation terrestre le soit elle-même.

Année sidérale.

Si l'on défalque, de l'année tropique, l'effet du petit mouvement rétrograde du point γ, on aura la durée véritable de la révolution du Soleil; et comme c'est celle que l'on trouverait si l'on prenait une étoile au lieu du point γ pour origine des longitudes, on lui donne le nom d'*année stellaire* ou *sidérale*, ce qui ne veut pas dire qu'elle soit exprimée en jours sidéraux.

Un des plus importants caractères de notre système, c'est assurément la constance, l'invariabilité absolue de la durée des révolutions des planètes autour du Soleil [1]. L'année sidérale, durée de

(1) Cela ne veut pas dire que d'une année à l'autre il n'y ait pas de petites variations dans cette durée. Mais ces variations sont purement périodiques et ne contiennent dans leur expression aucun terme proportionnel au temps. Elles ne vont donc pas en s'accumulant avec le temps; elles se compensent au bout d'un nombre d'années restreint, en sorte que, si l'on déterminait cette durée par quelques siècles d'observations faites il y a 5000 ans, on trouverait exactement le même résultat qu'aujourd'hui. Autrement dit, l'année sidérale n'a pas d'inégalités séculaires, mais de simples inégalités périodiques, qui affectent aussi l'année tropique.

la révolution de la Terre, participe à cette invariabilité. Si l'on désigne par p la vitesse diurne (rétrograde) du point γ, par n la vitesse (directe) du Soleil par rapport à ce point, $n-p$ sera la vitesse réelle de cet astre, et $\frac{360°}{n-p}$ sera la durée de sa révolution sidérale. On trouve ainsi, en faisant $p=\frac{50'',211}{365,242}$,

Révolution sidérale $365^{j},256368$.

Cette durée intervient dans la troisième loi de Kepler dont nous aurons à nous occuper au Livre II. Elle n'a aucun rapport avec les saisons dont la période est l'année tropique.

CHAPITRE IV.

LES DEUX PREMIÈRES LOIS DE KEPLER.

Étude du mouvement du Soleil dans son orbite.

Il est aisé, désormais, de transformer les coordonnées Æ du Soleil, observées au méridien, en coordonnées écliptiques L, et de comparer les longitudes ainsi déterminées avec la théorie des anciens. On reconnaît alors que leur formule, $L = L_0 + nt + 1^\circ 56^\circ \sin(L_0 + nt - \varpi)$, de la p. 24, basée sur l'hypothèse de l'excentrique, s'accorde assez bien avec l'observation; mais il n'en est plus de même de la seconde

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{30}\cos(L_0 + nt - \varpi) \quad \text{ou} \quad \frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{30}\cos m.$$

Les passages du Soleil au méridien nous font connaître chaque jour le diamètre apparent de cet astre et nous apprennent qu'il varie, dans le cours de chaque année, entre les extrêmes

$$31'28'' \text{ fin juin} \quad \text{et} \quad 32'32'' \text{ fin décembre.}$$

La distance du Soleil à la Terre ou le rayon vecteur variant, à très peu près, en raison inverse de ces diamètres apparents, les rayons vecteurs restent compris entre les extrêmes

$$1 - \tfrac{1}{60} \quad \text{et} \quad 1 + \tfrac{1}{60}.$$

Cette variation de $\frac{1}{60}$ n'est que la moitié de celle qu'exigerait la théorie des anciens; celle-ci est donc fausse.

On concilierait tout, à ce qu'il semble, en écrivant

$$L = L_0 + nt + 2e\sin m,$$
$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos m$$

et en faisant $e = \frac{1}{60}$; mais alors la courbe décrite par le Soleil ne serait plus un cercle : ce serait une sorte d'ovale, dans lequel la Terre occuperait une position excentrique (¹).

Kepler, après une étude approfondie de ces discordances entre la théorie ancienne et les meilleures observations de son temps, celles du célèbre astronome danois Tycho-Brahé, pensa que cette courbe pourrait bien être une ellipse dont la Terre occuperait un foyer. On aurait alors

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos v},$$

a étant le demi-grand axe (moyenne distance du Soleil à la Terre), e l'excentricité, v la longitude comptée à partir du périgée.

Les rayons extrêmes seraient encore $1 - e$ et $1 + e$, et, d'après ce qui précède, e serait de $\frac{1}{60}$. L'angle v devant être nul lorsque le rayon vecteur est $1 - e$, cet angle serait $L - \varpi$, ϖ désignant ici, comme dans la théorie des anciens, la longitude du point de l'orbite le plus voisin de la Terre, c'est-à-dire du périgée.

Par cette seule supposition d'une orbite elliptique, Kepler rompait hardiment avec les idées des Grecs, des Arabes, des Coperniciens même, car tous étaient convaincus qu'un astre ne saurait se mouvoir autrement que sur un cercle et d'un mouvement uniforme.

Mais cela ne suffisait pas; pour être en état de vérifier cette conjecture, c'est-à-dire de suivre le Soleil sur cette ellipse et d'y calculer son mouvement, il fallait encore une relation entre le temps et l'une des coordonnées v ou r. Cette relation, les anciens la trouvaient dans l'hypothèse de l'uniformité; celle-ci donnait immédiatement la longitude moyenne par $L_0 + nt$; ils n'avaient plus qu'à déduire L de cette longitude moyenne par la formule de l'excentrique. Kepler chercha donc dans le mouvement elliptique quelque chose d'uniforme, un élément qui variât proportionnellement au temps. Ce n'était certes pas l'angle v, car aux deux époques où $\frac{r}{a} = 1 - e$ et $\frac{r}{a} = 1 + e$, c'est-à-dire au pé-

(¹) Cet exposé de la découverte de la première loi de Kepler n'est que provisoire. Nous le rectifierons dans le livre II.

rigée et à l'apogée, l'observation donne :

	Angle parcouru en un jour.
Fin décembre.......	61', 14
Fin juin............	57', 18

Ce n'était pas non plus la vitesse linéaire, car, en la calculant comme dans des cercles de rayons $1-\frac{1}{60}$ et $1+\frac{1}{60}$, on devrait avoir

$$\frac{61,14}{57,18}=\frac{1+\frac{1}{60}}{1-\frac{1}{60}}=\frac{61}{59},$$

ce qui est faux, car le premier rapport est 1,069; le second est 1,034. Mais le simple aspect de ces deux nombres montre que le premier est sensiblement le carré du second, car 0,069 est à peu près le double de 0,034. S'il en était ainsi partout, $r^2\,\partial v$ ou le double de l'aire parcourue dans un très petit intervalle de temps (c'est ici un jour) serait constant; autrement dit, les aires décrites dans l'ellipse croîtraient proportionnellement au temps. Voyons donc si cette constance se vérifie ailleurs qu'aux deux bouts du grand axe. Nous prendrons pour cela les longitudes observées de jour en jour, et nous formerons le Tableau de leurs variations pour un jour, d'un bout à l'autre de l'année; puis nous mettrons en regard les rayons vecteurs calculés par $\frac{r}{a}=\frac{1-e^2}{1+e\cos v}$, en faisant $e=\frac{1}{60}$ et $v=L-\varpi$.

Dates.		Angle parcouru en un jour.	Rayon vecteur.	Aire décrite.
		° ′ ″		
Janvier	1......	1. 1.11	0,9833	0,00860
Mars	22......	0.59.27	0,9972	0,00860
Juin	20......	0.57.14	1,0164	0,00860
Septembre	18......	0.59. 0	1,0012	0,00860
Octobre	18......	0.59.40	0,9956	0,00860
Novembre	18......	1. 0.49	0,9862	0,00860

Ce calcul n'est pas tout à fait rigoureux, car nous avons traité des aires elliptiques finies comme des secteurs circulaires; mais il montre que dans le mouvement elliptique du Soleil on doit avoir

$$\tfrac{1}{2}r^2dv=\tfrac{1}{2}C\,dt,$$

$\frac{1}{2}C$ étant une constante qui exprime la surface décrite par le rayon

vecteur dans l'unité de temps. Sa valeur est évidemment

$$\frac{\text{aire totale de l'ellipse}}{\mathrm{T}} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}},$$

ou, en introduisant l'antique notation $\frac{2\pi}{\mathrm{T}} = n$,

$$\tfrac{1}{2}r^2 dv = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,n\,dt.$$

Telle est l'équation que Kepler a eue à intégrer à une époque où le Calcul intégral n'existait pas.

Voici comment on le ferait aujourd'hui. De l'équation de l'ellipse on tire

$$dv = \frac{a(1-e^2)}{e\sin v}\frac{dr}{r},$$

et comme

$$e\sin v = \sqrt{e^2 - \left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2},$$

l'équation différentielle se réduit à

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = a^2 n\,dt.$$

Pour faire disparaître le radical, posons

$$a - r = ae\cos u,$$

d'où

$$r\,dr = (a - ae\cos u)\,ae\sin u\,du.$$

L'équation devient alors

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt,$$

dont l'intégrale est

$$u - e\sin u = nt,$$

la constante étant nulle si l'on compte le temps t à partir de l'époque où le Soleil avait $a - ae$ pour rayon vecteur (passage au périgée).

Kepler a obtenu cette intégrale géométriquement à l'aide des propriétés des coniques découvertes et démontrées par les géomètres grecs.

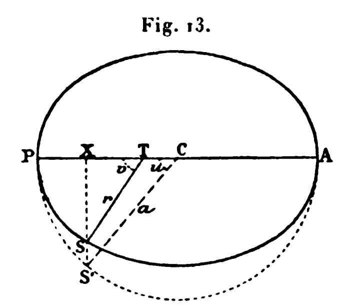
Problème de Kepler.

A la date t, comptée du passage au périgée, trouver les coordonnées du Soleil.

On calcule d'abord l'aire $\frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,nt$ décrite par le rayon vecteur pendant le temps t, et le problème se trouve ramené à celui-ci :

Étant donnée, dans l'ellipse ci-jointe, l'aire du secteur PTS, *en déduire l'angle en* T *et le rayon* TS.

Fig. 13.



Considérons l'ellipse comme la projection d'un cercle décrit sur le grand axe PA comme diamètre et ayant pour inclinaison sur le plan de la figure un angle φ dont le cosinus $= \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$; puis rabattons ce cercle sur le plan de la figure. En menant SS' perpendiculaire à PA, S' est le point du cercle dont la projection est S, et le secteur elliptique PTS, projection du secteur circulaire PTS', sera égal à PTS' $\sqrt{1-e^2}$. Or, en menant le rayon CS' et en nommant u l'angle PCS', on a

$$\text{PTS}' = \text{PCS}' - \text{TCS}' = \tfrac{1}{2}a^2 u - \tfrac{1}{2}a^2 e \sin u.$$

Donc le secteur elliptique PTS $= (\frac{1}{2}a^2 u - \frac{1}{2}a^2 e \sin u)\sqrt{1-e^2}$. Égalant cette expression à la valeur déjà calculée de l'aire, il vient

$$(\tfrac{1}{2}a^2 u - \tfrac{1}{2}a^2 e \sin u)\sqrt{1-e^2} = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,nt,$$

c'est-à-dire

$$u - e \sin u = nt.$$

On en tire u, puis de u on déduit $\frac{r}{a}$ par

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u,$$

et enfin de $\frac{r}{a}$ on déduit v par l'équation de l'ellipse.

Ce dernier calcul se fera plus sûrement de la manière suivante. Puisque

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos v} = 1 - e\cos u,$$

on déduit de là

$$\cos u = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v}.$$

Formez $1 - \cos u$, $1 + \cos u$, et divisez les deux expressions membre à membre, il vient

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}u = \frac{1 - e}{1 + e}\tan^2 \tfrac{1}{2}v,$$

d'où l'on tirera v. La longitude s'en déduit par

$$L = v + \varpi.$$

L'angle v porte le nom d'*anomalie vraie*.

L'angle u est l'*anomalie excentrique*.

L'angle $nt = m$ est l'*anomalie moyenne* (¹). Mais cette dernière n'est pas représentée sur la figure par un angle. Son produit par $\frac{1}{2}a^2\sqrt{1 - e^2}$ donne la surface du secteur ayant v pour angle. Il faut, à ce point de vue, exprimer n en parties du rayon, et, dans son expression $\frac{2\pi}{T}$, remplacer 2π par 6,28... et non par 360° ou 1 296 000″.

Ces deux premières lois de Kepler sont générales; elles doivent être énoncées ainsi :

1° *Toute planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le centre du Soleil occupe un foyer.*

2° *Dans cette ellipse les aires décrites par le rayon vecteur croissent proportionnellement aux temps.*

(¹) Si le temps t est compté à partir de l'époque du passage du Soleil au périgée; autrement il faudrait écrire $m = L_0 + nt - \varpi$.

Elles ont été découvertes expérimentalement au commencement du XVIIe siècle; leur démonstration résulte de leur accord constant avec les observations dans toute l'étendue du système solaire. Pour le Soleil en particulier, elles représentent non seulement les longitudes observées, mais aussi les rayons vecteurs tels qu'ils résultent des diamètres apparents. Il ne s'agit plus de pures hypothèses comme l'excentrique des anciens : ce sont des lois de la nature. Mais, pour Kepler, leur sens était purement géométrique; leur interprétation mécanique, dont nous nous occuperons plus loin, n'a été connue que bien des années après ce grand astronome.

Voici un exemple numérique : *On demande les coordonnées héliocentriques* $\mathcal{L}$ *et* r *de la comète de* $7\frac{1}{2}$ *ans*, 200 *jours après son passage au périhélie.*

Le demi-grand axe est 3,854, l'excentricité 0,549, la longitude du périhélie 50°49′, la durée de la révolution 7,566 années.

7,566........	0,87887
g365,25......	2,56260
gT...........	3,44147
og 2π.........	6,11261
og n...........	2,67114
log 200..........	2,60206
log m...........	5,27320
m.............	187670″
$m = 52°8'$	

log e.......	9,73957
log 206265″..	5,31443
log e en sec.	5,05400
$e = 113240''$	
ou environ 31°	
Valeur approchée	
de u...	52° + 31° = 83°

Résolution de l'équation
$u - e \sin u = m$.

	$u = 83°$	$u = 83°21'$
log sin u...	9,99675	9,99710
log e......	5,05400	5,05400
	5,05075	5,05110
Nombre...	112400′	112490
$e \sin u$....	31°13′	31°15′
m........	52. 8	52. 8
2e val. de u.	83.21	83.23
		val. définit.

Calcul de r.

log cos u......	9,06155
log e.........	9,73957
	8,80112
Nombre......	0,06326
$\frac{r}{a}$............	0,93674
log $\frac{r}{a}$........	9,97162
log a.........	0,58591
log r.........	0,55753
r............	3,6102

Calcul de v et de $\mathcal{L}$.

log$(1 + e)$....	0,19005
log$(1 - e)$....	9,65418
	0,53587
log $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$..	0,26794
log tang $\frac{1}{2}u$...	9,94974
log tang $\frac{1}{2}v$....	0,21768
$\frac{1}{2}v$...........	58°.47′,5
v...........	117.35
ϖ...........	50.49
$\mathcal{L}$...........	168.24

Le calcul de u exige un tâtonnement. Le facteur e en secondes étant de près de 31°, et l'angle $m - e \sin u$ devant être peu éloigné de 90°, on prendra pour première valeur approchée $52° + 31° = 83°$. Avec cette valeur on calcule $e \sin u$; la deuxième approximation est

$$m + e \sin u, \quad \text{ou} \quad 52°8' + 31°13' = 83°21'.$$

Avec cette deuxième valeur bien plus approchée on recommence le calcul et l'on obtient 83° 23′. Inutile d'aller plus loin, on retomberait sur le même résultat.

Il est aisé de se rendre compte de la rapide convergence de ces approximations. En différentiant l'équation, on voit que

$$du = \frac{dm}{1 - e \cos u},$$

ou à peu près $du = dm$ si $e \cos u$ est très petit, comme c'est ici le cas. Faire, dans le premier essai, $u = 83°$, c'est attribuer à m la valeur $83° - 31°13' = 51°47'$, au lieu de $52°8'$. L'erreur dm étant de $21'$, il faut faire $du = 21'$ et essayer $83° + 21'$.

Développement en série de la longitude et du rayon vecteur.

Quand l'excentricité est petite, comme elle l'est réellement dans toutes les orbites planétaires, il est utile d'intégrer l'équation différentielle relative aux aires en série procédant suivant les puissances croissantes de e. Remplaçons r par sa valeur dans cette équation, en écrivant $L - \varpi$ pour v et dL pour dv:

$$(1) \qquad dL = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}[1 + 2e \cos(L - \varpi) + e^2 \cos^2(L - \varpi)]\, n\, dt.$$

Si l'on néglige e, elle se réduit à $dL = n\,dt$, dont l'intégrale est $L = L_0 + nt$, L_0 désignant une constante arbitraire. C'est la formule des premiers astronomes.

Pour la seconde approximation, portons cette valeur de L dans (1), en tenant compte cette fois du terme en e:

$$dL = [1 + 2e \cos(L_0 + nt - \varpi)]\, n\, dt,$$

dont l'intégrale est

$$L = L_0 + nt + 2e\sin(L_0 + nt - \varpi).$$

C'est la formule des astronomes grecs, sauf le facteur 2. Portons enfin cette deuxième valeur dans (1), développons $(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}$ et effectuons les opérations en négligeant les termes qui contiendraient des puissances de e supérieures à la deuxième. L'équation (1) deviendra, en écrivant, pour abréger, $\mathcal{L}_0 + nt - \varpi = m$,

$$dL = [1 + \tfrac{3}{2}e^2 + 2e\cos(m + 2e\sin m) + e^2\cos^2(m + 2e\sin m)]\,dm.$$

On peut y remplacer $\cos(2e\sin m)$ par 1 et $\sin(2e\sin m)$ par $2e\sin m$ sans sortir des limites d'approximation ci-dessus ([1]). En outre, $\sin^2 m$ et $\cos^2 m$ devront être remplacés par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2m$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2m$. On a ainsi

$$dL = (1 + 2e\cos m + \tfrac{5}{2}e^2\cos 2m)\,dm,$$

dont l'intégrale est

$$L = L_0 + nt + 2e\sin m + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2m.$$

Les calculs deviennent de plus en plus compliqués lorsqu'on tient compte de e^3, puis de e^4, ... On aurait ainsi

$$L = L_0 + nt + A_1\sin m + A_2\sin 2m + A_3\sin 3m + \ldots,$$

Voici les valeurs de ces coefficients :

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2e - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \ldots,\\
A_2 &= 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \ldots,\\
A_3 &= \frac{26}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \ldots,\\
A_4 &= \frac{103}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \ldots,\\
A_5 &= \frac{1097}{30}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \ldots.
\end{aligned}$$

([1]) Car $2e\cos(2e\sin m)$, par exemple, est égal à $2e(1 - \frac{1}{2}4e^2\sin^2 m + \ldots)$; le second terme du développement aurait donc pour facteur e^3.

Sous cette forme, la longitude L du Soleil se compose de deux parties, comme chez les anciens :

La *longitude moyenne* $L_0 + nt$ croissant proportionnellement au temps ;

L'*équation du centre* $A_1 \sin m \ldots$ comprenant les termes périodiques.

En second lieu, pour le développement de $\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$, u étant donné par $u = m + e \sin u$, nous appliquerons une méthode due à Lagrange.

Soit, en général, à développer une fonction $F(u)$, u étant donné en fonction de la variable indépendante m par $u = m + ef(u)$; on aura

$$F(u) = F(m) + eF'(m)f(m)$$
$$+ \frac{e^2}{1.2} \frac{d\left[F'(m)\overline{f(m)}^2\right]}{dm} + \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d^2\left[F'(m)\overline{f(m)}^3\right]}{dm^2} + \ldots$$

Ici c'est $\cos u$ qu'il s'agit de développer ; posons donc

$$F(m) = \cos m, \quad F'(m) = -\sin m, \quad f(m) = \sin m.$$

Par conséquent,

$$\cos u = \cos m - e \sin^2 m - \frac{e^2}{1.2} \frac{d \sin^3 m}{dm} - \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d^2 \sin^4 m}{dm^2} - \ldots$$

Or on sait que

$$2 \sin^2 m = -\cos 2m + 1,$$
$$2^2 \frac{d \sin^3 m}{dm} = -3 \cos 3m + 3 \cos m,$$
$$\frac{d^2 \sin^4 m}{dm^2} = -2 \cos 4m + 2 \cos 2m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par ces substitutions on obtiendra finalement

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - B_1 \cos m - B_2 \cos 2m - \ldots,$$

en posant

$$B_1 = e - \frac{3}{2^3}e^3 + \frac{5}{6.2^6}e^5 - \ldots,$$

$$B_2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \ldots,$$

$$B_3 = \frac{3}{2^3}e^3 - \frac{45}{2^7}e^5 - \ldots,$$

$$B_4 = \frac{1}{3}e^4 - \ldots,$$

$$B_5 = \frac{125}{12.2^5}e^5 - \ldots.$$

Correction des éléments de l'orbite solaire.

Ces éléments sont connus depuis longtemps; la question se réduit à déterminer les très petites corrections dont ils auraient besoin pour représenter le mieux possible une longue suite d'observations récentes. Différentions l'expression précédente de la longitude par rapport à n, L_0, e, ϖ, en remarquant que $m = L_0 + nt - \varpi$:

$$dL = (1 + 2e\cos m)(dL_0 + t\,dn) + 2\sin m\,de - 2e\cos m\,d\varpi.$$

Nous considérerons dL comme l'écart entre la longitude calculée et la longitude observée, et, en désignant par ∂ des variations très petites dont les puissances supérieures sont négligeables, on écrira, pour chaque observation comparée à la théorie, une équation de condition de la forme

$$\text{long. obs.} - \text{long. calc.} = \partial L = (1 + 2e\cos m)(\partial L_0 + t\,\partial n) + 2e\sin m\,\partial e - 2e\cos m\,\partial\varpi.$$

L'excentricité étant très petite, toutes les observations auront à peu près même valeur pour déterminer ∂L_0; quant à ∂n, il faut employer les observations les plus distantes, celles où le coefficient t aura des valeurs très différentes; ∂e est le mieux déterminé lorsque $m = 90°$ ou $270°$, $\partial\varpi$ quand $m = 0°$ ou $180°$.

Voici les déterminations les plus récentes, celles de Le Verrier :

Époque : 1er janvier 1850, à midi, temps moyen de Paris.

$$L_0 = 280^\circ 46' 44'',$$
$$\varpi = 280^\circ 21' 22'',$$
$$e = 0,0167701,$$
$$n = 59' 8'',3113\ldots \quad \text{d'où} \quad T = 365^j,2422166.$$

Comme les données employées dans ces calculs sont comprises entre 1750 et 1858, n se trouve déterminé par un laps de temps de plus d'un siècle et par près de 10000 observations méridiennes du Soleil. C'est de ce moyen mouvement, et non de l'observation de deux équinoxes, que l'on déduit l'année tropique par la formule $T = \frac{360^\circ}{n}$.

En comparant la valeur de ϖ en 1850 avec celle qu'Hipparque lui assignait 2000 ans auparavant, c'est-à-dire 245°30', on voit que le périgée P de l'orbite solaire n'est pas fixe ; il a marché dans le sens direct de 34°51'. La théorie de l'attraction et les observations modernes montrent que ce mouvement est uniforme, et qu'il doit être réduit pour 2000 ans à 33°56'. A ce compte la longitude du périgée doit être écrite ainsi, pour la date t,

$$\varpi = 280^\circ 21' 22'' + 61'',080\,(t - 1850)$$

t étant exprimé en années.

CHAPITRE V.

INSTITUTION DU TEMPS MOYEN. TABLES DU SOLEIL.

Il s'agit de substituer au Soleil, dont les mouvements manquent d'uniformité, un soleil fictif qui s'en écarte le moins possible et dont l'ascension droite varie proportionnellement au temps. La rotation du globe terrestre étant parfaitement uniforme, les passages successifs au méridien d'un point pareil, débarrassé de toutes les petites inégalités de l'ascension droite du Soleil vrai, s'opéreront à des intervalles parfaitement égaux; ils constitueront donc une division régulière du temps différant fort peu de la division naturelle, mais inégale, que nous offre le Soleil vrai.

L'ascension droite du Soleil a pour expression

$$\operatorname{tang} Æ = \cos\omega \operatorname{tang} L.$$

La différence $Æ - L$, développée en série par la formule de la page 71 du tome I, sera

$$Æ - L = -\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2L + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4L - \ldots.$$

C'est la réduction à l'équateur. D'autre part,

$$L = L_0 + nt + A_1 \sin m + A_2 \sin 2m + \ldots,$$

expression dont les termes périodiques constituent, comme nous venons de le voir, l'équation du centre; $L_0 + nt$ est la longitude moyenne. Par conséquent (¹),

$$Æ = \text{longitude moyenne} + \text{équation du centre} + \text{réd. à l'équateur.}$$

(¹) Pour compléter cette expression, il faudrait y joindre les très petits effets de la nutation et des perturbations dont nous faisons abstraction pour le moment. Quant à la précession, elle est comprise dans la valeur de n.

La longitude moyenne varie bien proportionnellement au temps, mais non les deux autres parties : les jours solaires vrais ne sauraient donc être égaux et n'ont pu servir de mesure au temps qu'à une époque où l'on sentait peu le prix de l'exactitude.

Mais, comme ces termes périodiques restent toujours compris entre d'étroites limites, il n'y a qu'à les sacrifier, à réduire l'Æ du Soleil à la première partie, de beaucoup la plus considérable, $L_0 + nt$, pour avoir un mobile parfaitement propre à la mesure du temps.

Les termes périodiques étant tantôt positifs, tantôt négatifs et repassant chaque année par les mêmes valeurs, la différence variable entre le temps solaire vrai et le temps solaire fictif ou moyen sera toujours très petite; elle s'annulera même quatre fois dans le cours de chaque année.

D'après cela, le jour moyen sera l'intervalle constant de deux retours consécutifs au méridien d'un Soleil ayant $L_0 + nt$ pour ascension droite, et les heures moyennes seront les angles horaires de ce Soleil fictif exprimés en temps, à raison de 24^h pour 360°.

La correspondance entre le temps moyen, le temps vrai et le temps sidéral résultera de ce que la pendule sidérale devra marquer :

Au passage mérid. du Soleil moyen.... $L_0 + nt$.
Au passage mérid. du Soleil vrai...... $L_0 + nt$ + éq. centre + réd. à l'éq.

De même, si nous prenons une pendule réglée sur le temps solaire moyen, elle devra marquer :

Au passage méridien du Soleil moyen.... $0^h 0^m 0^s$,
Au passage méridien du Soleil vrai...... éq. du centre + réd. à l'équat.

La somme de ces deux termes est donc la différence des deux heures, l'une vraie, l'autre moyenne. On la nomme *équation du temps*, parce qu'elle représente la partie périodique qu'il faut retrancher de l'heure moyenne pour l'égaler à l'heure vraie.

En voici les valeurs, de 10 jours en 10 jours, pour 1882.

Dates.		Éq. du temps.	Dates.		Éq. du temps.
		m s			m s
Janvier	1......	— 3.53	Juillet	10......	— 3.32
	11......	— 8.14		20......	— 6. 5
	21......	— 11.37		30......	— 1.11
	31......	— 13.43	Août	9......	— 5.17
Février	10......	— 14.27		19......	— 3.27
	20......	— 13.56		29......	— 0.47
Mars	2......	— 12.19	Septembre	8......	+ 2.26
	12......	— 9.52		18......	+ 5.55
	22......	— 6.58		28......	+ 9.22
Avril	1......	— 3.54	Octobre	8......	+ 12.26
	11......	— 1. 1		18......	+ 14.47
	21......	+ 1.22		28......	+ 16. 7
Mai	1......	+ 3. 3	Novembre	7......	+ 16.11
	11	+ 3.50		17......	+ 14.52
	21......	+ 3.39		27......	+ 12.11
	31......	+ 2.36	Décembre	7......	+ 8.19
Juin	10	+ 0.53		17......	+ 3.38
	20......	— 1.14		27......	— 1.21
	30......	— 3.20			

Ainsi la différence entre l'heure vraie et l'heure moyenne ne dépasse guère un quart d'heure et s'annule quatre fois l'an. Il n'y a donc pas d'inconvénient appréciable, dans la vie civile, à substituer le temps moyen au temps vrai. Cette substitution a été faite, en vertu d'une ordonnance royale, en 1820 ([1]).

La différence de durée du jour vrai et du jour moyen est très faible; c'est la variation de l'équation du temps d'un jour à l'autre. Cette variation est à son maximum du 8 au 18 septembre; elle va à $3^m 29^s$ pour 10^j ou $20^s,9$ par jour. A cette époque, le jour vrai est plus long de $20^s,9$ que le jour moyen; il est plus court de $29^s,9$ du 17 au 27 décembre.

Cette différence entre le jour vrai variable et le jour moyen constant se compose de termes périodiques dont la période est m, $2m$, $3m$ et $2L$, $4L$, ... c'est-à-dire l'année, la moitié, le tiers, ...

([1]) Autrefois, on réglait les montres ou les horloges publiques sur les indications de quelque cadran, et il fallait y retoucher fréquemment pour leur faire suivre la marche irrégulière du Soleil vrai. Aujourd'hui, on les règle sur les passages méridiens du Soleil qui donnent le midi vrai, mais en tenant compte de l'équation du temps, dont le Bureau des Longitudes publie chaque année la valeur pour chaque jour de l'année.

de l'année. Comme la somme de ces termes, prise d'un bout à l'autre de l'année, est nulle, on peut dire que le jour moyen est la moyenne des jours vrais de toute une année (¹).

Nous avons vu qu'on appelle, en général, équation un terme périodique à *ajouter* à une partie *moyenne*, c'est-à-dire proportionnelle au temps, pour égaler cette partie moyenne à la quantité observée ou *vraie*. Ainsi

$$Æ\odot \text{ vraie} = Æ\odot \text{ moyenne} + \text{équation du temps.}$$

Mais, quand il s'agit de l'heure, c'est l'inverse :

$$\text{H vraie} = \text{H moyenne} - \text{équation du temps.}$$

C'est que ces heures, comme les angles horaires, se comptent en sens inverse des ascensions droites. Ainsi l'on a, au même instant,

$$H_v = AH_v \text{ angle horaire du Soleil vrai,}$$
$$H_m = AH_m \text{ angle horaire du Soleil moyen.}$$

Or

$$H_s = AH_v + Æ_v = AH_m + Æ_m;$$

donc

$$H_v = H_m - (Æ_v - Æ_m) = H_m - \text{équation du temps.}$$

Passage de l'heure moyenne à l'heure sidérale.

On demande l'heure sidérale le 14 *février* 1882 *à* $18^h 45^m 58^s,13$, temps moyen. On trouve dans la *Connaissance des Temps,* sous le titre *Temps sidéral à midi moyen,* l'Æ du ⊙ moyen à midi de chaque jour. Par interpolation on en déduit la valeur pour l'heure indiquée 14 février, et comme $H_s = AH_m + Æ_m$, il est aisé d'obtenir l'heure sidérale.

	h m s
$Æ_m$ le 14 février à midi moyen	21.37.35,43
Part. prop. pour $18^h 45^m 58^s$, Table VII....	3. 4,97
$Æ_m$ à l'heure dite	21.40.40,40
AH_m	18.45.58,13
$AH_m = H_s$	40.26.38,53

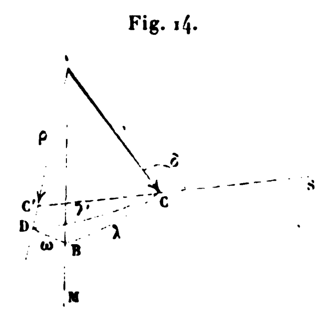
Il en faudra retrancher 24^h, ce qui donne $16^h 26^m 38^s,53$.

(¹) Les petites perturbations produites par les planètes exigeraient une légère modification à cet énoncé.

Tracé d'une méridienne de temps moyen sur un cadran.

Supposons d'abord que le cadran soit tracé sur un mur vertical, perpendiculaire au méridien. Soient, en perspective (*fig.* 14), AC le

Fig. 14.



style, AM la trace du méridien sur le mur. AM est la méridienne de temps vrai, parce que l'ombre du style se projette sur cette droite lorsque le Soleil passe au méridien, c'est-à-dire à midi vrai. Mais, à midi moyen, l'ombre AC′ du style AC se projettera un peu à droite ou à gauche de AM suivant la valeur de l'équation du temps à la date considérée. La courbe qu'il s'agit de construire est le lieu de l'extrémité C′ de l'ombre du style à midimoyen, d'un bout à l'autre de l'année.

Rapportons cette courbe à un système de coordonnées polaires ρ et ω, ρ étant la longueur AC′ de l'ombre à midi moyen le jour ou plutôt les deux jours où la distance polaire du Soleil est δ, et ω l'angle de l'ombre AC′ avec la ligne AM. Si l'on considère, pour un jour donné, le trièdre rectangle ayant pour arêtes AC, AM, AC′, ou le triangle sphérique CBD, dans lequel l'angle dièdre C est l'équation du temps E au jour dit, on aura $BC = \lambda$, $BD = \omega$, $CD = \lambda'$, et par conséquent

$$\operatorname{tang}\omega = \sin\lambda \operatorname{tang} E,$$
$$\operatorname{tang}\lambda' = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{séc} E.$$

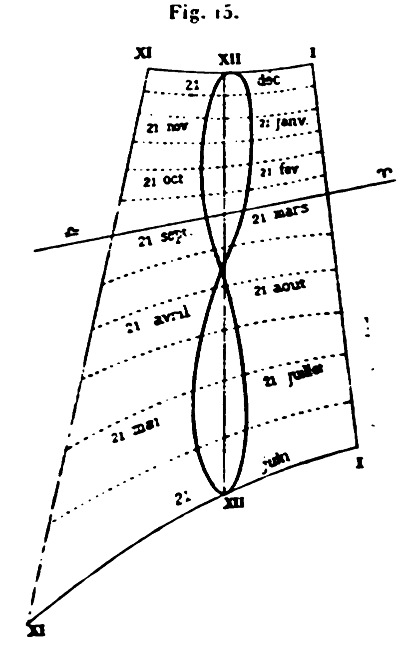
Soient CS le rayon solaire qui passe par l'extrémité du style, δ la distance polaire ACS du Soleil au jour dit, s la longueur AC du style : on aura $AC'C = \delta - \lambda'$, et

$$\rho = s \frac{\sin\delta}{\sin(\delta - \lambda')}.$$

Il sera facile de calculer ainsi les coordonnées ρ et ω pour un certain nombre de jours. On trouvera une courbe en 8 qui coupera la méridienne de temps vrai en quatre points. Lorsque la pointe du gnomon portera l'extrémité de son ombre sur cette courbe, ce sera l'instant du midi moyen.

Si le cadran est déclinant, il faudra substituer, aux équations précédentes d'un triangle sphérique rectangle, celles d'un triangle quelconque, l'angle dièdre B n'étant plus droit, mais égal à l'azimut du mur. La *fig.* 15 représente en partie un cadran du premier genre,

Fig. 15.



sur lequel on a marqué, comme sur une carte gnomonique, la courbe des ombres portées au même jour, à certaines dates, par le bout du style.

Première idée des Tables du Soleil.

Les astronomes et les marins ont à chaque instant besoin de connaître les coordonnées écliptiques ou équatoriales L, R, Æ, D du Soleil et l'équation du temps. Ils n'ont pas le temps de recourir à la théorie, et d'exécuter eux-mêmes ces longs calculs : il faut les

leur présenter tout faits, sous forme d'éphéméride contenant ces coordonnées calculées d'avance de jour en jour, à une heure déterminée, de manière à n'avoir plus à faire qu'une interpolation simple pour obtenir ces mêmes coordonnées à une date et à une heure quelconques. Le Bureau des Longitudes publie ces éphémérides deux ou trois années d'avance dans la *Connaissance des Temps,* pour midi, temps moyen de Paris. L'Amirauté anglaise en publie de pareilles pour midi, temps moyen de Greenwich.

Afin de faciliter le calcul de ces éphémérides, les astronomes construisent pour chaque astre des Tables servant aussi bien pour le passé que pour l'avenir. Nous allons en donner une idée en négligeant actuellement les petites corrections dues aux perturbations.

Dans l'équation du centre

$$A_1 \sin m + A_2 \sin 2m + \ldots,$$

on forme les coefficients A_1, A_2, ... par les formules de la page 51, et avec l'excentricité

$$e = 0,01677;$$

puis on calcule cette équation elle-même pour différentes valeurs équidistantes de m. On construit ainsi les deux premières colonnes de la Table I.

Disons ici, pour éviter toute méprise, qu'on désigne habituellement le rayon vecteur du Soleil par R et non par r. Quand on applique les formules précédentes aux planètes ou aux comètes, la longitude *dans l'orbite* est représentée par $\mathcal{L}$ et non par L, symbole affecté aux longitudes écliptiques.

TABLE I.

ÉQUATION DU CENTRE E ET RAYON VECTEUR R.

TABLE II.

ASCENSION DROITE Æ ET DISTANCE POLAIRE δ.

Argument *m*.	Équation du centre.	R.	Argument *m*.	Argument L.	Æ.	90° — δ.	Argument L.
°	° ′		°	°	h m	° ′	°
0	+0. 0—	0,9832	360	0	0. 0(+12h)	+0. 0—	180
5	0.10	0,9833	355	5	0.18	1.59	185
10	0.20	0,9835	350	10	0.37	3.58	190
15	0.30	0,9838	345	15	0.55	5.54	195
20	0.40	0,9843	340	20	1.14	7.50	200
25	0.50	0,9849	335	25	1.33	9.41	205
30	5.59	0,9855	330	30	1.52	11.28	210
35	1. 7	0,9864	325	35	2.11	13.12	215
40	1.15	0,9873	320	40	2.30	14.50	220
45	1.23	0,9883	315	45	2.50	16.21	225
50	1.30	0,9884	310	50	3.10	17.45	230
55	1.36	0,9906	305	55	3.31	19. 2	235
60	1.41	0,9918	300	60	3.51	20.10	240
65	1.45	0,9931	295	65	4.12	21. 9	245
70	1.49	0,9945	290	70	4.33	21.58	250
75	1.52	0,9959	285	75	4.55	22.37	255
80	1.54	0,9974	280	80	5.16	23. 5	260
85	1.55	0,9988	275	85	5.38	23.22	265
90	1.55	1,0003	270	90	6. 0	23.28	270
95	1.55	1,0017	265	95	6.22	23.22	275
100	1.53	1,0032	260	100	6.44	23. 5	280
105	1.51	1,0046	255	105	7. 5	22.37	285
110	1.48	1,0060	250	110	7.27	21.58	290
115	1.46	1,0073	245	115	7.48	21. 9	295
120	1.39	1,0086	240	120	8. 9	20.10	300
125	1.33	1,0098	235	125	8.29	19. 2	305
130	1.27	1,0109	230	130	8.50	17.45	310
135	1.20	1,0120	225	135	9.10	16.21	315
140	1.13	1,0130	220	140	9.30	14.50	320
145	1. 5	1,0138	215	145	9.49	13.12	325
150	0.57	1,0146	210	150	10. 8	11.28	330
155	0.48	1,0152	205	155	10.27	9.41	335
160	0.39	1,0158	200	160	10.46	7.50	340
165	0.29	1,0162	195	165	11. 5	5.54	345
170	0.20	1,0165	190	170	11.23	3.58	350
175	0.10	1,0167	185	175	11.42	1.59	355
180	0. 0—	1,0168	180	180	12. 0(−12h)	−0. 0—	360

Lorsque l'argument *m* ou L est pris dans la colonne de droite, il faut appliquer à E ou à 90° — δ le signe de droite. Quand l'argument L est pris à droite, il faut ajouter 12h à l'Æ obtenue.

On opère de même pour le rayon vecteur, dont l'expression est

$$R = 1 + \frac{e^2}{2} - B_1 \cos m - B_2 \cos 2m - \ldots.$$

L'argument de cette Table est m. Nous l'avons fait varier de 5° en 5° seulement, pour abréger.

La Table II donne Æ et $90° - \delta$. La première s'obtient par le calcul de la réduction à l'équateur

$$-\tan^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2L + \tfrac{1}{2}\tan^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4L - \ldots.$$

Quant à δ, on le tire de la formule trigonométrique

$$\cos\delta = \sin\omega \sin L.$$

Ainsi l'argument de la seconde Table est L.

Formation de l'argument m pour une date donnée t. La formule

$$m = L_0 + nt - \varpi$$

se compose de deux termes

$$L_0 + nt = 280°46',7 + 59',1385(t - 1850) \text{ (}^1\text{)},$$

où $t - 1850$ représente un nombre de jours, et

$$\varpi = 280°21' + 1',018(\tau - 1850),$$

où $\tau - 1850$ est exprimé en années. La seule précaution à prendre, c'est de tenir compte des bissextiles quand on transforme les années en jours, et de retrancher de ce nombre de jours le plus grand multiple de $T = 365^j,2422$ qui y soit contenu, car, dans le calcul de la longitude moyenne, on n'a pas à tenir compte d'un nombre entier de circonférences. Voici du reste un exemple.

Calculer les coordonnées du Soleil pour le 11 mai 1882 à midi, temps moyen de Paris.

$$t = 1882^a + 130^j$$
$$1850$$

(il y a $\frac{32}{4}$ ou 8 bissextiles)...... $32^a + 130^j = 32 \times 365^j + 8^j + 130^j$

(¹) $n = 59'8'',3113 = 59',1385$.

Retranchons 32 révolutions entières ou $(365 + 0,2422)32$, nous aurons pour reste

$$t - 1850 = 130^j,25, \text{ en négligeant un multiple de T;}$$

puis on aura

$$nt = 59',138 \times 130^j,25 = 7702',8 = 128^\circ.22',8$$
$$L_0 = 280^\circ.46',7$$
$$L_0 + nt = 409^\circ\ 9',5 = 49^\circ 9',5$$
$$\varpi = 280^\circ 21' + 1',018 \times 32,36 = 280.53$$
$$\text{argument } m = 128$$

Avec cette valeur de m, la Table I donne

Équation du centre........ $1^\circ\ 29',4$

d'où

$$L = 50^\circ\ 39'$$

La même Table donne

$$R = 1,0105$$

Avec l'argument L, la Table II donne

$$Æ = 3^h 12^m,7$$
$$\delta = 72^\circ 5'$$

$$\text{Éq. du temps} = 49^\circ 9',5 - 3^h 12^m,7 = 3^h 16^m,6 - 3^h 12^m,7 = -3^m,9.$$

Mais ce n'est là qu'une première approximation représentant le lieu du Soleil calculé, à la minute ronde, dans son orbite elliptique, non troublée par les perturbations. En calculant avec plus de rigueur, et en tenant compte de ces petites mais indispensables corrections, on aurait trouvé, pour le 11 mai 1882,

$$L = 50^\circ 38' 38'',4,$$
$$R = 1,0105290,$$
$$Æ = 3^h 12^m 48^s,93,$$
$$\delta = 72^\circ\ 4' 35'',7,$$
$$\text{Équation du temps} = -3^m 48^s,14.$$

Coordonnées rectilignes du Soleil.

On a besoin souvent des coordonnées du Soleil rapportées à trois axes rectangulaires. Prenons le plan de l'écliptique pour le

plan des xy, dirigeons l'axe des x vers le point γ, celui des y vers le point situé à 90° de là, dans le sens direct, et l'axe des z perpendiculairement à l'écliptique, vers le nord; nous aurons, en désignant par R et $\odot$ les coordonnées polaires du Soleil,

$$z = 0,$$
$$x = \mathrm{R}\cos\odot,$$
$$y = \mathrm{R}\sin\odot.$$

Quant aux variations dx, dy que subissent les coordonnées en fonction du temps, il faut partir des différentielles

$$dx = d\mathrm{R}\cos\odot - \mathrm{R}\sin\odot\, d\odot,$$
$$dy = d\mathrm{R}\sin\odot + \mathrm{R}\cos\odot\, d\odot.$$

Les lois du mouvement elliptique donneront $d\mathrm{R}$ et $d\odot$ en fonction de dt. On a en effet, par la loi des aires, en désignant par a le demi-axe de l'ellipse solaire ou la moyenne des valeurs extrêmes de R,

$$\mathrm{R}^2\, dv = \mathrm{C}\, dt = na^2\sqrt{1-e^2}dt,$$

et par $\odot = v + \varpi$,

$$d\odot = dv.$$

Par conséquent

$$d\odot = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{R}^2} n\, dt.$$

L'équation de l'ellipse

$$\mathrm{R} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

donne

$$e\sin v\, dv = \frac{a(1-e^2)}{\mathrm{R}^2} d\mathrm{R},$$

d'où

$$d\mathrm{R} = \frac{e\sin v}{a(1-e^2)} na^2\sqrt{1-e^2}\, dt = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} e\sin v\, dt.$$

Portons ces valeur, dans l'expression de dx :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} e\sin v\cos\odot - \mathrm{R}\sin\odot\, \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{R}^2} n.$$

En remplaçant R par sa valeur, il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}[e\sin v\cos\odot - (1+e\cos v)\sin\odot],$$

et comme $\odot - v = \varpi$,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}(\sin\odot + e\sin\varpi);$$

de même,

$$\frac{dy}{dt} = +\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}(\cos\odot + e\cos\varpi).$$

Coordonnées héliocentriques de la Terre.

La longitude ♁ de la Terre, vue du Soleil, diffère de 180° de la longitude $\odot$ du Soleil vu de la Terre. Il suffit donc d'ajouter $\pm 180°$ à cette dernière pour avoir celle de la Terre, ou de changer le signe des coordonnées rectilignes du Soleil dont nous venons de donner l'expression. Ainsi les coordonnées héliocentriques ξ et η de la Terre seront

$$\xi = R\cos ♁ = -R\cos\odot,$$
$$\eta = R\sin ♁ = -R\sin\odot.$$

De même, pour passer des éléments de l'orbite apparente du Soleil à ceux de l'orbite réelle que la Terre décrit autour de cet astre, il faut ajouter $\pm 180°$ aux longitudes géocentriques L_0 et ϖ. On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 100°46'44'' \\ \varpi &= 100°21'22'' \end{aligned}\right\}\ \text{héliocentriques,}$$

les autres éléments restant les mêmes.

Si on veut représenter l'orbite terrestre par une figure, on adoptera une disposition inverse de celle des *fig.* 9 et 13. On mettra S au foyer au lieu de T, T au lieu de S, et, laissant S♈ comme origine des longitudes, on devra intervertir les lettres P et A. Mais, comme les éphémérides donnent $\odot$ et non ♁, les astronomes ont l'habitude d'y adapter toutes leurs formules.

LIVRE II.

LES PLANÈTES.

Ce Livre comprend l'étude géométrique des planètes et des satellites. Il s'arrête à la découverte de la troisième loi de Kepler, qui a si heureusement complété la théorie du mouvement elliptique. On s'est efforcé d'y donner une idée nette du système des anciens, de la révolution que Copernic a opérée dans la Science par l'adoption des belles idées pythagoriciennes, et surtout de la part qui revient à Kepler dans les conceptions modernes. Ce Livre est donc, comme le précédent, consacré à la Géométrie céleste de Ptolémée, de Copernic et de Kepler; le Livre suivant le sera à la Mécanique céleste de Newton.

CHAPITRE VI.

MOUVEMENT DES PLANÈTES AUTOUR DU SOLEIL.

Nous avons vu, dans l'introduction au Tome I, que les planètes se meuvent, comme la Terre, autour du Soleil dans des orbites peu excentriques, presque circulaires, dont les plans n'ont qu'une inclinaison très faible sur l'écliptique. En outre, les intervalles qui séparent ces orbites l'une de l'autre sont considérables. Ce sont là des circonstances qui se prêtent merveilleusement à l'emploi d'une méthode d'approximation successive, en négligeant d'abord les excentricités et les inclinaisons pour déterminer d'autres éléments plus caractérisés.

Si nous étions placés sur le Soleil autour duquel les planètes circulent, l'étude de leurs mouvements ne différerait en rien de celle de l'orbite apparente du Soleil, et l'on y emploie effectivement les mêmes formules pour exprimer la longitude et le rayon vecteur en fonction du temps, dans le plan de l'orbite. Mais l'observateur étant placé sur la Terre, pour passer des coordonnées L_1 et β_1 qu'il y observe aux coordonnées héliocentriques L et β, ou réciproquement, il faut effectuer une transformation de coordonnées par changement d'origine, ou opérer une réduction au centre de la station, comme on dit en Géodésie, c'est-à-dire résoudre un triangle STP (*fig.* 16) dont le Soleil, la Terre et la planète considérée forment les sommets, et dans lequel on ne connaît *a priori* que deux éléments, à savoir le rayon vecteur ST = R de la Terre, donné par les Tables du Soleil pour l'instant de l'observation, et l'angle en T, compris entre le Soleil et la planète.

Cet angle, on peut toujours le déterminer, car, en désignant par L_1 la longitude géocentrique ♈TP de la planète et par ☉ la longi-

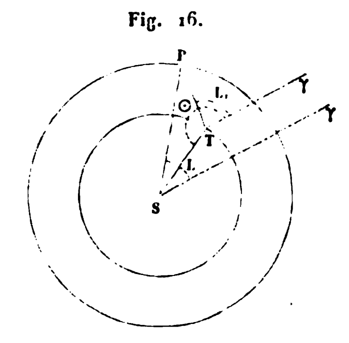
tude γTS du Soleil, on a $T = \odot - L_{,}$. Alors la réduction P au centre de la station sera donnée par

$$\sin P = \sin(L_{,} - L) = \frac{R}{r} \sin(\odot - L_{,}),$$

L étant la longitude héliocentrique γSP de la planète. L'angle P porte le nom de *parallaxe annuelle*.

Ces deux données R et T ne suffisent pas pour résoudre ce

Fig. 16.



triangle et obtenir les longitudes héliocentriques. Il y a donc là un cercle vicieux; on en est sorti par la remarque suivante.

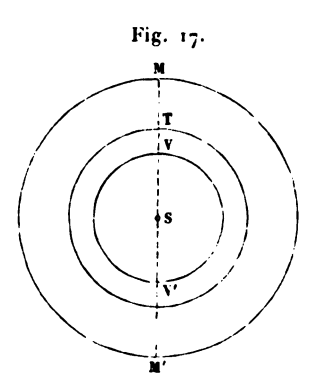
Oppositions et conjonctions.

Les vitesses angulaires des planètes étant en raison inverse de leurs distances au Soleil, il arrivera de temps en temps, comme pour les aiguilles d'une montre, que les deux mobiles T et P, circulant autour de S, se trouveront en ligne droite avec ce dernier, c'est-à-dire en conjonction ou en opposition avec le Soleil. Dans l'un et l'autre cas, la réduction au centre de la station est 0 ou 180°, et l'observateur terrestre obtient immédiatement la longitude héliocentrique de la planète, comme s'il était placé sur le Soleil.

Il y a lieu de distinguer ici entre les planètes intérieures à l'orbite terrestre et les planètes extérieures. La planète extérieure Mars, dont l'orbite est tracée sur la *fig.* 17, est en opposition en M et en conjonction en M', tandis que la planète intérieure Vénus, qui ne peut être vue en opposition, présente deux sortes de conjonctions, interne en V, externe en V'.

Le rayon STM est évidemment l'axe de l'hémisphère céleste qui, pour l'observateur terrestre, est actuellement plongé dans la nuit; c'est donc vers minuit, à peu près, qu'une planète passe au méridien de l'observateur lorsqu'elle est en opposition. Réciproquement, si la planète avait des habitants, ils verraient à ce moment la Terre se projeter comme un point noir sur le disque du Soleil.

Fig. 17.



C'est aussi là le phénomène que les planètes intérieures nous présenteraient à chacune de leurs conjonctions internes, si leurs orbites étaient réellement couchées sur le plan de l'écliptique, comme nous l'avons supposé jusqu'ici.

Quand on tient compte de leur inclinaison, il faut une définition plus générale des *aspects* dont nous venons de parler. Une planète est en opposition ou en conjonction lorsqu'elle se trouve, avec le Soleil et la Terre, dans un même plan perpendiculaire à celui de l'écliptique. Sa longitude héliocentrique est alors égale à celle de la Terre (opposition, conjonction interne), ou à cette même longitude augmentée de 180° (conjonction externe).

Les planètes extérieures ont un trop faible éclat pour être visibles près du Soleil, même avec les plus puissantes lunettes. Il ne faut donc compter que sur leurs oppositions, mais celles-là suffisent. En effet, les vitesses angulaires des différentes planètes étant, de fait, incommensurables entre elles, leurs oppositions se répartissent assez régulièrement sur toute l'orbite, en sorte qu'en suivant ainsi une planète, d'opposition en opposition, on obtient une série de longitudes héliocentriques parfaitement disposées pour l'étude de ses mouvements.

Voici des observations méridiennes de Jupiter supposées faites vers l'opposition de 1882, à Paris :

	Æ.	δ.
	h m s	° ′ ″
Décembre 16...........	5.44.55,33	66.57.33,3
17...........	44.19,94	37,6
18...........	43.44,56	42,4

On en déduit les coordonnées écliptiques $L_{,}$, $\beta_{,}$ et l'on place en regard les valeurs correspondantes de $\odot - 180°$.

	Temps moyen.	$L_{,}$.	$\beta_{,}$.	$\odot - 180°$.
	h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Décembre 16.....	12. 2.52	86.31.41,8	90.21.58,6	84.59.58,0
17.....	11.58.21	23.33,7	50,2	86. 0.51,8
18.....	11.53.50	15.25,4	41,7	87. 1.45,7

Une simple interpolation montre que le phénomène

$$L_{,} = \odot - 180°$$

a eu lieu le 17, à $19^h 50^m 19^s$. Par conséquent, décembre 17, à $19^h 50^m 19^s$, opposition de Jupiter :

$$\text{Longitude hélioc. } L = 86° 20' 53'',6.$$

Quant à la distance au pôle E, on trouve au même instant

$$\beta_{,} = 90° 21' 47'',4.$$

Nous verrons plus loin comment on obtient la valeur correspondante de β, c'est-à-dire de l'autre coordonnée héliocentrique.

On vient de voir, par ces observations, que Jupiter en opposition était animé, pour nous, d'un mouvement rétrograde de 8′ 10″ par jour. Si on avait pu l'observer, cette année, à l'époque de la conjonction, vers le 30 mai, on aurait constaté que son mouvement apparent était alors direct et de 14′ 0″ par jour (¹).

Révolutions synodiques.

Il importe donc de connaître d'avance les périodes qui ramènent les oppositions des planètes extérieures ou les conjonctions in-

(¹) Du 10 mars au 17 août, Jupiter, noyé dans la lumière du jour, a été inobservable.

ternes des planètes intérieures. T et T′ étant les durées en jours des révolutions de la planète et de la Terre, n et n' leurs moyens mouvements diurnes, si on néglige les excentricités des deux orbites, les mouvements de la planète et du Soleil seront uniformes et leur vitesse relative constante sera $n' - n$. L'intervalle d'une opposition à l'autre sera donc $\frac{360°}{n'-n} = \frac{TT'}{T-T'}$. C'est la durée de la révolution synodique de la planète. On a calculé ainsi les nombres du tableau suivant :

Noms et symboles.	Révolutions synodiques.
☿ Mercure	115^{j},8775
♀ Vénus	583,9214
♂ Mars	779,9365
♃ Jupiter	398,8006
♄ Saturne	378,0921

Mais, à cause des excentricités, ces périodes ne peuvent être considérées que comme des valeurs moyennes autour desquelles les vraies périodes oscillent.

Révolutions sidérales.

Néanmoins ces périodes moyennes avaient autrefois une grande importance; on les observait directement et on en déduisait immédiatement la durée T de la révolution de chaque planète. Pour les obtenir, on comparait deux oppositions de dates très éloignées, dans lesquelles la planète était revenue à peu près à la même longitude, en sorte qu'elle avait fait dans l'intervalle plusieurs fois le tour du ciel. Ces deux dates comprenant un nombre entier de révolutions synodiques, affectées de petites inégalités, tantôt en plus, tantôt en moins, il suffisait de diviser l'intervalle par ce nombre entier pour avoir, avec une grande précision, la révolution synodique moyenne, par suite n et T. C'est ainsi que ces éléments ont été connus des anciens avec une très grande exactitude. Aujourd'hui on y pourrait employer 2000 ans d'observations.

Toutes ces révolutions se nomment *tropiques* et se rapportent au point vernal γ, origine des longitudes. Ce point n'est pas abso-

lument fixe; il rétrograde sur l'écliptique de 50″ par an (précession). Les durées obtenues comme nous venons de le dire ne mesurent donc pas les révolutions véritables, celles qu'on trouverait en rapportant les longitudes à un point réellement fixe, à une étoile par exemple. De là le nom de révolution *sidérale* qu'on applique à ces dernières ([1]). Voici le tableau de ces durées pour les anciennes planètes, toutes exprimées en jours solaires moyens ou en années.

	RÉVOLUTIONS SIDÉRALES	
	en jours solaires moyens.	en années.
Mercure.	87,969258	0,2408
Vénus....	224,700787	0,6152
La Terre	365,256374 ([2])	1
Mars....	686,979646	1,881
Jupiter..	4332,588171	11,863
Saturne............	10759,236360	27,457

Il y a une autre manière de déterminer ces durées, en dehors des oppositions : c'est de comparer deux dates, aussi éloignées que possible, auxquelles la planète aura été vue dans l'écliptique. Quelle que soit la position de la Terre, et, par suite, de l'observateur, si une planète est vue traversant l'écliptique, c'est qu'elle passe réellement par ce plan. Ce procédé est d'ailleurs celui que nous avons employé déjà dans la théorie du Soleil, pour déterminer la durée de l'année tropique, en déduisant des observations les instants où le Soleil traverse l'équateur.

Étude du mouvement héliocentrique.

Comme la planète Jupiter revient presque chaque année à l'opposition, on obtient ainsi, pendant une révolution entière de la planète, une dizaine de longitudes héliocentriques assez régulièrement distribuées sur toute l'orbite. En les comparant avec l'ex-

---

([1]) Ce nom a le tort de donner à croire aux commençants que ces durées sont exprimées en jours sidéraux.

([2]) Rappelons que la durée de l'année tropique est de $365^j,242217$.

pression de la longitude

$$L = L_0 + nt + \text{éq. du centre } ({}^1),$$

dans laquelle n est déjà parfaitement connu, on déterminera aisément les constantes L_0, e, ϖ. Dans l'antiquité et, à l'époque moderne, de Copernic à Kepler, l'équation du centre, déduite de la théorie de l'excentrique, s'écrivait

$$e \sin(L_0 + nt - \varpi) + \tfrac{1}{2} e^2 \sin 2(L_0 + nt - \varpi) + \ldots.$$

Depuis Kepler la théorie du mouvement elliptique a prévalu, et on écrit ainsi l'équation du centre, en négligeant les puissances de e supérieures à la deuxième :

$$2 e \sin(L_0 + nt - \varpi) + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2(L_0 + nt - \varpi).$$

Ce qui nous importe actuellement, c'est de faire remarquer que la connaissance des éléments n, L_0, e, ϖ donne le moyen de calculer, pour une date quelconque t, la longitude héliocentrique L de la planète. Nous serons donc en état de calculer aussi la parallaxe annuelle P, applicable à une observation faite en dehors des oppositions, par

$$\sin P = \sin(L_, - L) = \frac{R}{r} \sin(\odot - L_,),$$

formule dans laquelle nous ne connaissions jusqu'ici que les deux éléments $\odot - L_,$ et R. On en tire

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin(L_, - L)}{\sin(\odot - L_,)}.$$

La circonstance la plus avantageuse pour l'exacte détermination de ce rapport est celle où $\odot - L_, = 90°$ ou $270°$. Alors la planète, vue de la Terre, se trouve à 90° du Soleil à droite ou à gauche; elle est dite *en quadrature*. Ces observations-là se font le matin ou le soir, non loin de 6^h.

Ainsi on observe la planète dans ses oppositions pour étudier son mouvement autour du Soleil et déterminer les constantes de son orbite. On l'observe dans ses quadratures pour en déduire les

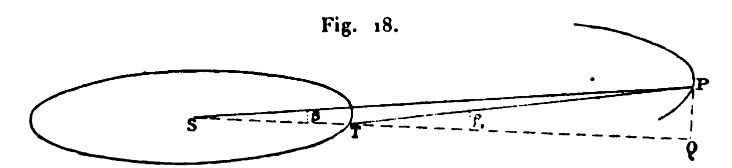
(1) L_0 est la longitude moyenne à l'époque $t = 0$, et non une valeur particulière de la longitude vraie désignée par L.

rayons vecteurs en parties du demi-grand axe de l'orbite terrestre pris pour unité. Il y a donc là, je veux dire dans les observations de quadrature, un contrôle pour la théorie du mouvement héliocentrique fondée sur les oppositions, et, en même temps, un moyen de déterminer les dimensions de l'orbite.

Position du plan de l'orbite.

Jusqu'ici nous avons négligé l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique. Les distances polaires $\beta_{\prime}$ observées de la Terre ne répondent pas aux distances β vues du Soleil, mais, à chaque oppo-

Fig. 18.

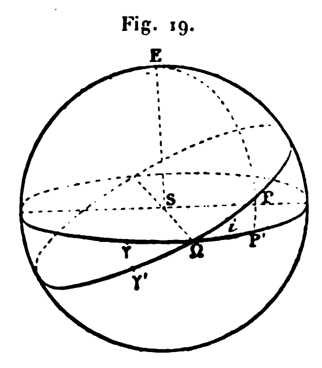


sition, les trois points S, T et Q, projection de la planète P sur l'écliptique, étant en ligne droite, on a, entre ces angles (*fig.* 18), la relation

$$\sin(\beta_{\prime} - \beta) = \frac{R}{r} \sin\beta_{\prime}.$$

L'expression du rayon vecteur, en fonction de $\mathcal{L}_0$, e, ϖ, fait connaître les variations que subit r entre une quadrature et l'oppo-

Fig. 19.



sition. En appliquant cette formule, on déterminera ainsi autant de valeurs de r que de L.

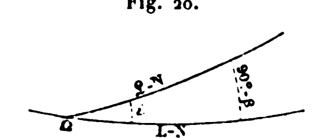
Soient donc en perspective sur la sphère céleste (*fig.* 19), dont

le Soleil occupe le centre, $\gamma\Omega P'$ l'écliptique, $\gamma'\Omega P$ l'orbite de la planète, Ω le nœud ascendant, N sa longitude $\gamma\Omega$ et i l'inclinaison. Convenons, de plus, de compter les longitudes dans l'orbite à partir d'un point γ' tel que $\Omega\gamma' = \Omega\gamma = \mathrm{N}$. La longitude de la planète dans l'orbite étant désignée par $\mathcal{L}$, on aura, pour passer des coordonnées dans l'orbite aux coordonnées écliptiques, en prenant pour axes SE, $\mathrm{S}\Omega$, $\mathrm{S}\Omega + 90^\circ$,

$$\begin{aligned} z &= r\cos\beta &&= r\sin i \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N}),\\ x &= r\sin\beta\cos(\mathrm{L} - \mathrm{N}) &&= r\cos(\mathcal{L} - \mathrm{N}),\\ y &= r\sin\beta\sin(\mathrm{L} - \mathrm{N}) &&= r\cos i \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N}), \end{aligned}$$

ou tout simplement, par le triangle rectangle de la *fig.* 20,

Fig. 20.



$$\cos\beta = \sin i \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N}),$$
$$\operatorname{tang}(\mathrm{L} - \mathrm{N}) = \cos i \operatorname{tang}(\mathcal{L} - \mathrm{N}),$$

équations déjà employées dans la théorie du Soleil. La dernière, réduite en série, donne

$$\mathrm{L} - \mathcal{L} = -\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2(\mathcal{L} - \mathrm{N}) + \ldots.$$

C'est la réduction à l'écliptique.

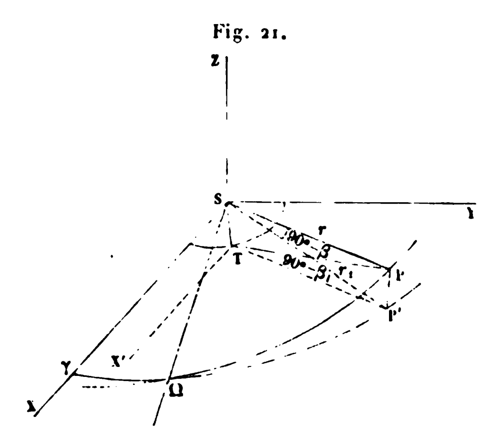
CHAPITRE VII.

LES PLANÈTES VUES DE LA TERRE.

Parallaxe annuelle en tenant compte de l'inclinaison.

Revenons maintenant en arrière et complétons l'expression de la parallaxe annuelle où nous avions d'abord négligé l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique. Rapportons la planète et la Terre à trois axes S♈ ou SX, SY, dirigés à 90° de là dans le sens direct,

Fig. 21.



SZ perpendiculaire au plan de l'écliptique vers le nord (*fig.* 21). Soient z, x, y, ζ, ξ, η les coordonnées héliocentriques de la planète P et de la Terre T. Il s'agit de transporter l'origine de S en T. Les coordonnées de P rapportées à ces nouveaux axes étant z', x', y', on aura

$$z' = z - \zeta,$$
$$x' = x - \xi,$$
$$y' = y - \eta,$$

et comme on a, en désignant par ♁ la longitude héliocentrique de la Terre,

$$\zeta = 0,$$
$$\eta = R \sin ♁ = -R \sin \odot,$$
$$\xi = R \cos ♁ = -R \cos \odot,$$

ces formules exprimées en coordonnées sphériques seront, en désignant SP par r, TP par $r_{,}$,

$$(1) \quad \begin{cases} r_{,} \cos\beta_{,} = r\cos\beta, \\ r_{,} \sin\beta_{,} \cos L_{,} = r \sin\beta \cos L + R\cos\odot, \\ r_{,} \sin\beta_{,} \sin L_{,} = r\sin\beta\sin L + R\sin\odot. \end{cases}$$

Elles ne supposent pas connus les rayons r et $r_{,}$, mais seulement leurs rapports à R. Pour avoir la parallaxe annuelle $L_{,} - L$, il faut considérer que l'origine des angles a été prise arbitrairement à S♈; rien ne nous empêche donc de choisir une autre origine telle que SP′ projection de SP, ce qui revient à retrancher L de tous les angles L, $L_{,}$ et ⊙. On a alors

$$(2) \quad \begin{cases} r_{,} \cos\beta_{,} = r\cos\beta, \\ r_{,} \sin\beta_{,} \cos(L_{,} - L) = r\sin\beta + R\cos(\odot - L), \\ r_{,} \sin\beta_{,} \sin(L_{,} - L) = \phantom{r\sin\beta +{}} R\sin(\odot - L), \end{cases}$$

d'où, en éliminant r,

$$(3) \quad \tang(L_{,} - L) = \frac{\frac{R}{r}\sin(\odot - L)\operatorname{coséc}\beta}{1 + \frac{R}{r}\cos(\odot - L)\operatorname{coséc}\beta}.$$

C'est, comme on le voit, une formule de parallaxe; elle s'applique indistinctement aux planètes extérieures ou intérieures.

Il y a là néanmoins une distinction à faire entre les deux cas. Si l'on suit sur la *fig.* 16 les variations de l'angle P pour une planète extérieure ($R < r$), on voit qu'il atteint un maximum pour T ou $\odot - L_{,} = 90°$. L'angle T, au contraire, prend toutes les valeurs possibles dans le cours d'une révolution synodique. Cette valeur maximum de la parallaxe annuelle est la moitié de l'angle sous lequel on verrait, de la planète extérieure, l'orbite de la Terre.

S'il s'agit d'une planète intérieure, l'angle à la planète, c'est-à-dire

$P = L_{,} - L$, prend toutes les valeurs possibles de o à 360°, tandis que l'angle à la Terre $T = \odot - L_{,}$ ne peut dépasser la moitié de l'angle sous lequel on verrait, de la Terre, l'orbite de la planète intérieure. Il en résulte qu'une planète de ce genre ne peut s'écarter du Soleil au delà de l'angle dont le sinus est $\frac{R}{r}$. Cet angle se nomme l'*élongation de la planète*. Comme r et R varient légèrement par suite des excentricités des orbites, la plus grande élongation de Vénus varie entre 42° et 45°; celle de Mercure entre 16 et 29° (l'excentricité de l'orbite de cette planète est très forte).

Il résulte de là qu'un astre quelconque, une comète par exemple, qu'on voit à moins de 90° du Soleil, peut être en ce moment à l'intérieur ou à l'extérieur d'une sphère décrite sur l'orbite terrestre. Mais si on le voit à 90° ou à plus de 90°, il est nécessairement plus loin du Soleil que la Terre (¹). C'est ainsi que, la pointe de la lumière zodiacale s'élevant à plus de 90° du Soleil disparu sous l'horizon, on en conclut que la nébulosité quelconque qui produit cette apparence déborde l'orbite terrestre.

On parviendrait aux mêmes résultats en discutant la formule

$$(4) \qquad o = r \sin\beta \sin(L - L_{,}) + R \sin(\odot - L_{,}),$$

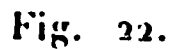
qu'on obtiendra en retranchant $L_{,}$ des angles du groupe (1).

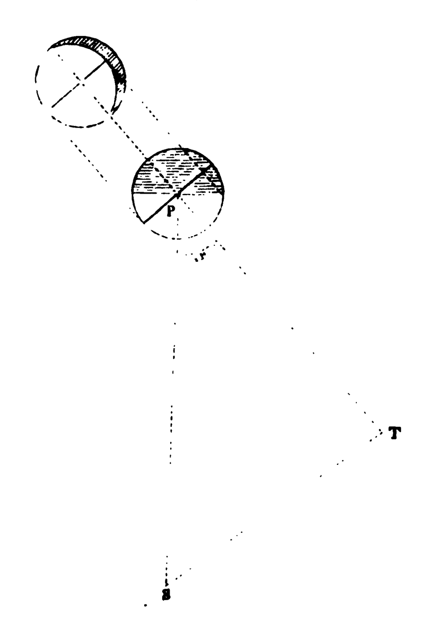
Phases des Planètes.

La *fig.* 22 montre que les planètes doivent présenter des phases et que celles-ci dépendent de l'angle SPT ou $P = L_{,} - L$. Négligeant ici l'inclinaison des orbites, on voit que l'angle SPT est égal à l'angle dièdre formé par deux plans passant par P, et respectivement perpendiculaires aux lignes SP et TP. Le premier coupe la planète supposée sphérique suivant le cercle de séparation d'ombre et de lumière; le second suivant le cercle de contour apparent. La figure donne le rabattement du disque vu de la Terre et la projection, sur ce disque, du demi-cercle d'illumination. Celle-ci est une ellipse qui limite à droite la partie éclairée de la planète. La figure montre que la planète

(¹) Car la perpendiculaire est plus courte que toute oblique.

vue en quadrature atteint la phase maximum. La partie manquante est proportionnelle au sinus verse de l'angle $L_{,} - L$. Cela n'est sensible que pour Mars, qui paraît en effet *gibbeux* en quadrature. Alors $\sin P = \frac{1}{1,52}$, d'où $P = 41°$, angle dont le sinus verse est de $\frac{1}{4}$ du rayon. C'est ce qu'indique la figure. Pour Jupiter, la partie


Fig. 22.

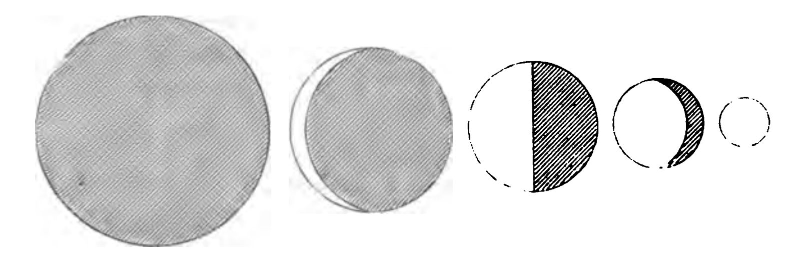


manquante se réduit à 0,02 du rayon du disque apparent de la planète. A la quadrature du 22 septembre 1882, le demi-diamètre angulaire était de 19″; la phase réduisait donc ce demi-diamètre d'un tiers de seconde du côté opposé au Soleil. Pour Saturne, et à plus forte raison pour Uranus et Neptune, les phases sont absolument insensibles.

Il en est tout autrement des planètes intérieures. Pour celles-là l'angle P n'a pas de limite et varie de 0° à 360°. Les phases vont donc de la complète illumination du disque à la complète invisibilité. Vénus, par exemple, en conjonction interne, tourne vers nous sa face obscure et devient invisible, ou, si elle se projette sur le Soleil, Vénus nous apparaît comme une tache noire parfaitement

ronde. Alors sa distance à la Terre est $R - r = 0,28$. En conjonction externe, elle est au delà du Soleil à la distance $R + r = 1,72$; son disque est plein, entièrement éclairé, mais six fois plus petit (*fig.* 23). A sa plus grande élongation elle ressemble à la Lune

Fig. 23.



quand celle-ci est au premier ou au deuxième quartier. Dans les positions intermédiaires elle est gibbeuse et très petite, ou en croissant délié et très grande. Dans ce dernier cas, c'est un des plus beaux objets que les lunettes nous aient faire voir dans le ciel. Mêmes phénomènes, moins frappants, pour Mercure.

Distances des Planètes au Soleil.

Les formules (3) ou (4) des pages 78 et 79, dans lesquelles L et même β sont désormais connus, permettent de calculer le rapport variable $\frac{R}{r}$ des rayons vecteurs, et par suite a, distance moyenne du Soleil à la planète.

Une observation de Jupiter en quadrature, du 22 septembre 1882 à $17^h 53^m 21^s$, a donné pour la longitude géocentrique

$$L_{,} = 90^{\circ}17'17'',54.$$

Les éléments de l'orbite obtenus précédemment par les oppositions fournissent les coordonnées héliocentriques

$$L = 78^{\circ}55'17'',1, \quad \beta = 90^{\circ}27'21'',6.$$

Celles du Soleil sont au même moment

$$\odot = 80^\circ 5' 22'',1, \quad \log R = 0,0012414.$$

Voici le calcul de r par la formule (4) :

$\log \sin (L - l)$	9,2946607
$\log \sin \beta$	9,9999862
$C^t \log \sin (\odot - L)$	0,0000026
$\log \frac{R}{r}$	9,2946495
$\log R$	0,0012414
$\log r$	0,7065919

Les éléments de l'orbite donnent à cet instant

$\log \frac{r}{a}$	9,99034
$\log a$	0,71625

On aura donc 5,2028 pour la distance moyenne de Jupiter au Soleil, en parties de la distance moyenne du Soleil à la Terre (demi-grand axe de l'orbite terrestre) prise pour unité.

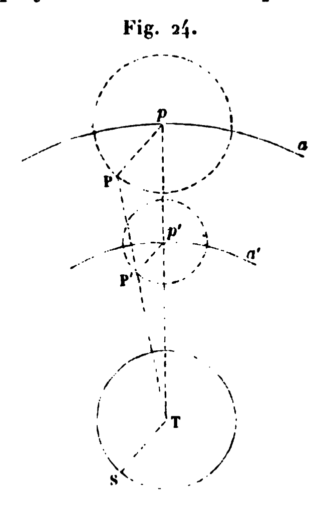
Ainsi l'observation d'une planète extérieure en quadrature, ou celle d'une planète intérieure à sa plus grande élongation, nous fait connaître, pour chacune d'elles, la valeur du rapport $\frac{R}{r}$ qui figure dans l'expression de la parallaxe annuelle, et par suite toutes les distances des planètes au Soleil.

Il importe de noter ici que ces théories et ces formules étaient parfaitement connues des Anciens, ainsi que la valeur numérique du rapport $\frac{R}{r}$ pour chaque planète. Ces formules restent en effet les mêmes si on prend les mouvements apparents pour des mouvements réels, et si, plaçant la Terre au centre du système, on fait marcher les planètes dans des épicycles de rayon R, portés par des cercles déférents de rayon r. Seulement, pour les Anciens, la Terre était réellement immobile ; il n'y avait donc aucune raison d'attribuer aux épicycles le même rayon. R devenait arbitraire ; il en était de même de r, car, seul, le rapport $\frac{R}{r}$ est défini par les observations.

Montrons d'abord que les apparences ne sont nullement changées quand on donne à ces rayons R et r des valeurs arbitraires, pourvu qu'on conserve leur rapport.

Soient (*fig.* 24) ap l'orbite de la planète, R le rayon de l'orbite de la Terre et aussi de l'épicycle véritable de la planète, S le Soleil; p la

Fig. 24.



position actuelle du centre de l'épicycle sur le déférent ap. Pour avoir le lieu P de la planète vue de la Terre, on mènera pP parallèle à TS. Il est évident que la direction TP ne sera pas changée si l'on prend pour rayon du déférent la ligne Tp', à la condition de prendre pour le rayon de l'épicycle P'p' tel que $\frac{p'P'}{Tp'} = \frac{pP}{Tp} = \frac{R}{r}$ (¹).

Les Anciens avaient trouvé, pour le rapport $\frac{R}{r}$, les fractions suivantes, que j'ai réduites au même numérateur 100 :

Mercure	$\frac{100}{36}$
Vénus	$\frac{100}{72}$
Mars	$\frac{100}{152}$
Jupiter	$\frac{100}{522}$
Saturne	$\frac{100}{921}$

(¹) Cependant l'angle à la planète SPT qui règle les phases ne restera plus le

C'est avec ces valeurs qu'ils calculaient la formule

$$\sin(L_{,} - L) = \frac{R}{r} \sin(\odot - L_{,}) \operatorname{cos\acute{e}c} \beta$$

pour suivre la planète sur son épicycloïde.

Copernic, en adoptant les idées des Pythagoriciens, de Philolaüs (— 450), d'Aristarque de Samos (— 280), etc., n'a eu qu'à prendre l'inverse de ces rapports pour obtenir les distances des planètes au Soleil. Voici les distances de Copernic :

Mercure	0,36
Vénus	0,72
La Terre	1
Mars	1,52
Jupiter	5,22
Saturne	9,21

Cette dernière est un peu trop petite; elle doit être 9,54. Pour tout le reste, Copernic conserva les artifices des anciens Astronomes; il faisait circuler les planètes d'un mouvement uniforme dans des cercles dont le centre était écarté du Soleil, et il adopta les valeurs que l'on avait appliquées à ces diverses excentricités.

Sur les stations et rétrogradations des planètes.

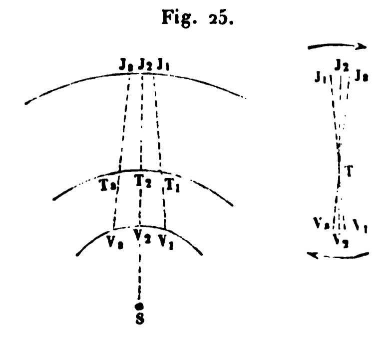
En calculant, avec les distances et les durées des révolutions, les vitesses linéaires des planètes dans leurs orbites, on trouve que les vitesses linéaires sont d'autant plus petites que la planète considérée est plus loin du Soleil. De là le phénomène de la rétrogradation des planètes extérieures en opposition, ou des planètes intérieures en conjonction interne. Une simple figure, sur laquelle les intervalles V_1V_2, V_2V_3 (*fig.* 25), parcourus en temps égaux par une planète intérieure, sont plus grands que les espaces T_1T_2, T_2T_3 parcourus par la Terre dans le même temps, et ces derniers plus grands que les espaces J_1J_2, J_2J_3 parcourus par une planète exté-

---

même; il devient SP'T, en sorte que le système des Anciens, qui représente passablement les mouvements des planètes, est complètement en erreur pour leurs phases.

rieure, met la chose en évidence, car il suffit de transporter les lignes visuelles $T_1J_1, T_2J_2, \ldots$ parallèlement à elles-mêmes en un

Fig. 25.



même point quelconque T, pour voir que les planètes V et J paraîtront, en T, se mouvoir dans le sens rétrograde. C'est ce que donne aussi la formule de la parallaxe annuelle. On a en effet [groupe (1)]

$$\tang L_{,} = \frac{r \sin L + R \sin \odot}{r \cos L + R \cos \odot},$$

en négligeant l'inclinaison de l'orbite. Si on néglige aussi les excentricités, on aura

$$dL = n\,dt = \frac{v}{r}\,dt, \quad d\odot = N\,dt = \frac{V}{R}\,dt,$$

n, N étant les moyens mouvements, v et V les vitesses linéaires. Différentions l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites, et en remarquant (p. 78) que $r_{,} \cos L_{,} = r \cos L + R \cos \odot$,

$$\frac{dL_{,}}{dt} = \frac{rv + RV + (Rv + Vr)\cos(\odot - L)}{r_{,}^2}.$$

A l'opposition (¹), $\odot - L = 180°$; le numérateur se réduit à $(r - R)(v - V)$. Cette dérivée est négative, puisque $r - R$ et $v - V$ sont de signes contraires pour les planètes extérieures comme pour les intérieures; par conséquent, $L_{,}$ va en décroissant à cette époque, autrement dit la planète rétrograde.

(¹) Ou à la conjonction interne pour les planètes intérieures.

La planète est stationnaire quand cette dérivée est nulle, c'est-à-dire lorsque

$$\cos(\odot - L) = -\frac{rv + RV}{Rv + rV}.$$

La condition de réalité

$$(R - r)v > (R - r)V$$

est évidemment satisfaite dans les deux cas que nous examinons. Pour Mars, par exemple, les époques des stations seront déterminées par

$$\cos(\odot - L) = -0{,}9575, \quad \text{d'où} \quad \odot - L = 163^\circ 15' \text{ et } 196^\circ 45'.$$

L'arc compris, égal à $(N - n)t$, donne $t = 72^j$ pour la durée de la rétrogradation. En portant les valeurs de $\odot - L$ dans l'expression de tang $(L_1 - L)$, on aura l'arc de rétrogradation vu de la Terre, lequel est d'une quinzaine de degrés pour Mars, de 10° pour Jupiter, de 7° pour Saturne. Pour la solution complète de questions de ce genre, il faudrait tenir compte de l'excentricité, mais ce que nous venons d'en dire suffit amplement.

Nous verrons un peu plus loin qu'il résulte du tableau des vitesses et des durées des révolutions que $V^2 r =$ const. dans le système solaire. Si au lieu de cela on avait $V =$ const. il n'y aurait pas de rétrogradation, mais seulement station au moment de l'opposition. Si l'on avait $\frac{V}{r} =$ const., une planète vue de la Terre en opposition y resterait perpétuellement, etc.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE ET TABLES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

Véritable marche suivie par Kepler.

Maintenant nous sommes en état de corriger ce qui a été dit, dans la théorie du Soleil, au sujet des deux premières lois de Kepler. Il y avait intérêt, pour la suite des idées et pour n'être pas obligé de scinder en deux parts la théorie du Soleil, à y rattacher cette découverte. Mais il nous a fallu en cela commettre deux inexactitudes historiques.

En premier lieu, Kepler aurait eu besoin des rayons vecteurs pour reconnaître la vraie forme de l'orbite du Soleil. Nous avons supposé qu'il les avait déduits de la mesure des diamètres apparents du Soleil, chose impossible sans le secours des lunettes et qui, en fait, n'a été réalisée qu'un demi-siècle après Kepler. Aujourd'hui encore, ce serait un procédé fort insuffisant. En second lieu, l'orbite apparente du Soleil est trop peu excentrique pour faire apprécier l'erreur que les Anciens commettaient dans le calcul de l'équation du centre que l'on peut écrire, dans l'hypothèse des Anciens (p. 24), en faisant $TC = \varepsilon$,

$$\varepsilon \sin m + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2m + \ldots,$$

tandis qu'elle doit être, par la théorie elliptique (p. 51),

$$2e \sin m + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2m + \ldots.$$

En effet, si l'on s'en tient au premier terme et qu'on détermine ε par des observations convenables, vers $m = 90^\circ$, et $m = 270^\circ$, on trouve $\varepsilon = 0,0335$. Or, e n'est que la moitié de cette valeur. La différence de ces deux théories, en posant $\varepsilon = 2e$, a pour expres-

sion $\frac{3}{4}e^2 \sin 2m$. L'écart maximum a donc lieu pour les valeurs 45°, 135°, ... de m, et se réduit, dans la théorie du Soleil, à 43″, 5, c'est-à-dire à une quantité presque insensible à l'œil nu.

Ainsi, pour éprouver la théorie de l'excentrique des Anciens, il fallait choisir une planète dont l'orbite fût beaucoup plus excentrique que celle de la Terre. Ce fut à Mars que Kepler s'adressa; mais, de quelque manière qu'il tentât d'accommoder l'hypothèse des Anciens aux belles observations de Tycho sur lesquelles il travaillait, en faisant varier les constantes ε, $\mathcal{L}_0$ et ϖ (p. 24), il ne parvint pas à réduire les écarts du calcul au-dessous de 8′, erreur incompatible avec la précision bien connue de ces observations. Il en conclut que l'orbite de Mars ne pouvait être un cercle excentrique.

Quelle était donc la nature de cette orbite ? Pour l'étudier, il fallait en déterminer les rayons vecteurs au moyen de la formule de la parallaxe annuelle (p. 79)

$$r \sin\beta \sin(L_{,} - L) = R \sin(\odot - L_{,}),$$

appliquée aux quadratures observées, et c'est même pour Mars que ces rayons vecteurs seront le mieux déterminés par l'observation. Kepler calcula donc ces rayons en corrigeant autant que possible les L, obtenues à l'aide de la théorie de l'excentrique, des erreurs désormais connues de cette théorie, et se trouva ainsi en possession des coordonnées complètes L et $r \sin\beta$, et par suite $\mathcal{L}$ et r (p. 76), de points régulièrement répartis sur toute l'orbite. Cette seconde épreuve montra, comme la première, que l'orbite n'était nullement circulaire. Elle apprit en outre qu'elle était légèrement aplatie dans le sens perpendiculaire à la ligne des apsides, sur laquelle les Anciens plaçaient la Terre et le centre de l'excentrique : c'était une sorte d'ovale. Kepler essaya la plus simple de ces courbes, l'ellipse. Mais ses tentatives seraient restées vaines s'il n'avait, en même temps, cherché et trouvé une relation entre le temps et les coordonnées du mobile. C'est surtout dans cette complication d'un problème où il faut à la fois chercher la forme de la fonction de r et de $\mathcal{L}$, qui représente l'orbite, et celle de la fonction de r, $\mathcal{L}$ et t qui la relie au temps, que consistait la difficulté. Ce grand astronome l'a résolue par ces deux lois, que rien ne faisait soupçonner avant lui : *Les aires par-*

courues par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps; la trajectoire est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

Troisième loi de Kepler.

Nous verrons bientôt que les planètes peuvent être assimilées à des projectiles qui auraient été amenés à diverses distances du Soleil, à peu près dans le même plan, et qu'on aurait lancés ensuite avec des vitesses déterminées par les distances, de manière à leur faire décrire autour du Soleil des orbites presque circulaires. Ainsi il peut, il doit même exister une relation entre ces distances et ces vitesses, autrement dit entre ces distances et les durées des révolutions. Mais le choix des distances elles-mêmes reste arbitraire, du moins c'est là une question d'origine qui tient au mode de formation du système solaire. Elle était bien prématurée au temps de Kepler : elle est aujourd'hui encore peu accessible, malgré la conception cosmogonique de Laplace.

De là deux voies, l'une stérile, l'autre scientifique. La première consiste à chercher une loi entre les distances des planètes et les nombres entiers qui expriment leurs rangs à partir du Soleil; la deuxième, à chercher une relation entre ces mêmes distances et les vitesses ou les durées des révolutions.

Kepler passa une partie de sa vie à chercher la première. Frappé dans sa jeunesse de la perfection des cieux, idée antique alors dominante, et de la perfection analogue des cinq corps réguliers de la Géométrie, il avait cherché là une loi. Il trouva, en employant les distances de Copernic,

$$0,39, \quad 0,72, \quad 1, \quad 1,52, \quad 5,20, \quad 9,22,$$

qu'entre les sphères idéales, autrefois cristallines, de Mercure et de Vénus on pouvait placer un octaèdre circonscrit à la première et inscrit dans la seconde. Il plaça de même l'icosaèdre entre les sphères de Vénus et de la Terre, le dodécaèdre entre la Terre et Mars, la pyramide entre les sphères démesurément distantes de Mars et de Jupiter, enfin le cube entre Jupiter et Saturne. Et comme la Géométrie ne fournit que cinq corps réguliers, il était naturel, disait-il, qu'on ne trouvât au ciel que six planètes.

Les modernes ont aussi suivi cette voie stérile, témoin la loi de Bode qui a joué un certain rôle dans la découverte de Neptune en fournissant une mauvaise hypothèse à MM. Adams et Le Verrier. Désignant par D la distance d'une planète au Soleil et par n son rang d'ordre à partir du Soleil, on aurait par cette loi

$$D = 0,4 + 0,3 \times 2^{n-2}.$$

Si l'on admet que les planéticules qui circulent entre les orbites de Mars et de Jupiter tiennent lieu d'une planète ayant le cinquième rang, cette prétendue loi donnait 38,8 pour la distance de la planète cherchée par ces deux habiles astronomes. La découverte une fois faite en dépit de la loi, il se trouva que la planète n'était qu'à la distance 30. L'erreur allait à 8 ou 9 fois la distance de la Terre au Soleil.

Lorsque Kepler eut découvert les deux premières lois, il comprit enfin, bien vaguement il est vrai, qu'il y avait là une question de Mécanique; que le Soleil devait exercer une force s'étendant jusqu'aux planètes les plus éloignées pour en régler les mouvements. La seconde voie se présenta alors à son esprit et il se mit à chercher une relation entre les périodes et les distances. Après bien des tâtonnements, il s'avisa de comparer les temps des révolutions aux puissances successives des distances. Les premières puissances simples ne réussirent pas :

Planètes.	T.	a.	a^2.
Mercure	0,241	0,39	0,15
Vénus	0,615	0,72	0,52
La Terre	1	1	1
Mars	1,881	1,52	2,32
Jupiter	11,863	5,20	27,07
Saturne	29,457	9,54	90,99

Il essaya donc une puissance intermédiaire entre 1 et 2, c'est-à-dire $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ et il trouva :

Planètes.	T.	$a^{\frac{3}{2}}$.
Mercure	0,241	0,241
Vénus	0,615	0,615
La Terre	1	1
Mars	1,881	1,874
Jupiter	11,863	11,86
Saturne	29,457	29,46

Ainsi $T = a^{\frac{3}{2}}$, quand on prend [illegible]
le demi-grand axe de l'orbite terrestre [illegible]
l'on adopte des unités quelconques, [illegible]

$$[illegible]$$

c'est-à-dire *les carrés des temps* [illegible]
comme les cubes des grands axes. [illegible]
cation mécanique de cette loi. [illegible]
mais non la conclusion [illegible]
cette loi est vraie, elle donne, [illegible]
tement connus, un moyen de [illegible]
parfait que la triangulation [illegible]
durées des révolutions [illegible]
une précision toujours [illegible]
donnent les distances, déjà [illegible]
Mars, le sont moins encore [illegible]
Saturne.

Écrivons $\frac{a^3}{T^2} = K$ et [illegible]
prenant la distance [illegible]
solaire pour unité de temps [illegible]

const. keplérienne [illegible]

dont le logarithme [illegible]

Supposons maintenant [illegible]
moyenne a' de Jupiter [illegible]
de $4332^j,588171$, [illegible]

Par conséquent,

$$a' = 5{,}2012 \text{ (}^1\text{)}.$$

C'est ainsi que Kepler a opéré; les nombres contenus dans le tableau suivant et tirés des Tables toutes récentes de Le Verrier ont été obtenus de la même manière.

Noms des planètes.	Durées des révolutions sidérales.	Distances moyennes au Soleil.
Mercure............	87,969258	0,3870987
Vénus..............	224,700787	0,7233322
La Terre...........	365,256474	1,0000000
Mars...............	686,979646	1,5236913
Jupiter............	4232,588171	5,202400
Saturne............	10759,236360	9,538861
Uranus.............	30688,39036	19,18329
Neptune............	60181,11316	30,05503

Tables et éphémérides des planètes.

Les Tables de chaque planète sont de même forme que celles du Soleil, dont nous avons déjà donné une idée au Chapitre V.

Elles comprennent une Table destinée à faciliter le calcul de la longitude moyenne $\mathcal{L}_0 + nt$ pour les siècles passés et futurs; une Table de l'équation du centre dont l'argument est $m = \mathcal{L}_0 + nt - \varpi$; une Table des rayons vecteurs ayant même argument : ces deux dernières répondent aux développements

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + nt + A_1 \sin m + A_2 \sin 2m + \ldots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - B_1 \cos m - B_2 \cos 2m - \ldots;$$

puis la Table de la réduction à l'écliptique, déduite de la formule

$$\operatorname{tang}(L - N) = \cos i \operatorname{tang}(\mathcal{L} - N)$$

et mise sous la forme

$$L = \mathcal{L} - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2(\mathcal{L} - N) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} i \sin 4(\mathcal{L} - N) \ldots$$

dont l'argument est $\mathcal{L} - N$; enfin une Table pour la coordonnée écliptique β. Par ces Tables, qui réduisent le calcul à de simples

(1) Nous reviendrons plus tard sur ce résultat, qui a besoin d'une correction d'environ $\frac{1}{30000}$.

additions, on obtient, pour une date t, les coordonnées écliptiques de la planète L, β, r. Quant aux coordonnées géocentriques, on les calcule par les formules de la page 78.

Lorsqu'il s'agit d'une éphéméride, comme celles de la *Connaissance des Temps,* donnant les coordonnées L, β, r, $L_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $r_{\prime}$ pour tous les jours de l'année à midi moyen, on calcule ces positions de 10 jours en 10 jours à l'aide des Tables, puis on interpole pour les jours intermédiaires, en tenant compte des différences premières, deuxièmes, etc.

Quant aux planètes nouvellement découvertes et aux comètes, on ne saurait recourir à des Tables pour le calcul des coordonnées héliocentriques. On applique alors les formules de Kepler, qui n'exigent que la connaissance des six éléments de l'orbite :

$$m = \mathfrak{L}_0 + nt - \varpi,$$
$$u - e \sin u = m,$$
$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u,$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathfrak{L} - \varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

Correction des éléments elliptiques.

En comparant ces éphémérides avec les observations journalières des grands observatoires, on détermine les erreurs des Tables qui résultent de celles des éléments adoptés. Lorsqu'elles deviennent trop sensibles, il faut corriger ces éléments et procéder à la construction de Tables nouvelles. Celles-ci vont ainsi en se perfectionnant d'âge en âge.

L'observation donne aux dates t, t', t'', ... les Æ et δ de la planète considérée. On en déduit les coordonnées écliptiques géocentriques $L_{\prime}$ et $\beta_{\prime}$, puis on passe de celles-ci aux coordonnées héliocentriques L et β par les formules de parallaxe annuelle de la page 78. Désignons par ∂L et $\partial\beta$ les écarts entre ces coordonnées observées et les coordonnées tabulaires. Pour les faire disparaître, il faudra appliquer aux éléments adoptés des corrections ∂n, $\partial\mathfrak{L}_0$, ∂e, $\partial\varpi$, ∂i, ∂N. En différentiant l'équation

$$\cos\beta = \sin(\mathfrak{L} - N)\sin i$$

par rapport à β, on a

$$\tan\beta\,\partial\beta = -\cot(\mathcal{L} - \mathrm{N})\,\partial\mathrm{N} + \cot i\,\partial i.$$

D'autre part, la page 53 nous fournit l'équation différentielle

$$(1 + 2e\cos m)(\partial\mathcal{L}_0 + t\,\partial n) + 2\,\partial e\sin m - 2e\,\partial\varpi\cos m = \partial\mathrm{L}.$$

On formera donc, à l'aide des écarts constatés $\partial\beta$, $\partial\mathrm{L}$, deux séries d'équations de condition qu'on traitera par la méthode des moindres carrés [1], de manière à obtenir les valeurs les plus probables des corrections cherchées. Il n'y a pas lieu de s'occuper du demi-grand axe a, car cet élément est lié à T ou à n par la relation $\frac{a^3}{\mathrm{T}^2} = \mathrm{K}$.

On procède ainsi, depuis 2000 ans, par des approximations successives. Mais la théorie elliptique de Kepler a porté subitement les Tables des mouvements célestes à un haut degré de perfection qui ne s'est pas démenti, même lorsque, dans le cours du XVII[e] siècle, l'application des lunettes aux instruments de mesure est venue augmenter tout à coup l'exactitude des observations d'une manière extraordinaire.

Cependant on a dû noter, peu de temps après la découverte de ces lois fondamentales qui ont renouvelé toute l'Astronomie, des circonstances qui devaient faire comprendre que tout n'était pas dit. La première est la variation que les éléments des planètes subissent dans la suite des siècles. Tel est le mouvement du périhélie de l'orbite terrestre, dont la longitude augmente de 1100″ par siècle. Les astronomes arabes avaient découvert ce phénomène en comparant leurs observations à celles de l'Almageste. Pour la Lune, ces mêmes variations, portant sur presque tous les éléments, sont bien plus grandes et ont été reconnues dès les débuts de l'Astronomie exacte. Les unes et les autres seraient inexplicables si l'on s'en tenait aux lois de Kepler. En second lieu, la théorie elliptique, bien qu'elle satisfasse de très près à toutes les observations d'un même siècle, laisse néanmoins subsister de petits écarts de nature périodique. Or il n'est pas possible de les faire disparaître, quelques

(1) L'emploi de cette méthode ne sera légitime que lorsqu'on aura tenu compte des perturbations dans la comparaison des observations avec les Tables.

corrections que l'on applique aux éléments des orbites. La théorie elliptique que nous venons d'exposer et les Tables qu'on en déduit, si supérieures à celles des Anciens, ne sont donc elles-mêmes qu'une seconde approximation. La troisième et dernière est celle que fournit la Mécanique céleste.

Variations séculaires des orbites des planètes.

Pour en donner une idée, nous nous bornerons à deux éléments de l'orbite de la Terre, la longitude du périhélie et l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur. Le premier élément a été déterminé à diverses époques, par les Grecs d'abord, puis par les Arabes, enfin par les Modernes. Lorsqu'on en défalque l'effet du mouvement rétrograde du point γ (précession), pour ramener les longitudes à une même époque, celle d'Hipparque, on trouve :

Dates.	Observateurs.	Longitude du périhélie.
		° ′
— 127	Hipparque	65.30
833	Albategnius	68.59
1231	Aboul-Hassan	69.21
1858	Le Verrier	72.46

Ainsi la longitude du périhélie va en augmentant d'un tiers de degré par siècle. Bien que cet élément ait dû être très difficile à déterminer avec précision, par des observations faites à l'œil nu (on a vu que la correction $\partial\varpi$ ne figure dans les équations de condition qu'avec le très faible facteur e), les astronomes arabes n'ont pas manqué de remarquer le déplacement subi par le périhélie entre leur époque et celle d'Hipparque. C'est à eux qu'est due cette importante découverte.

Quant à l'obliquité de l'écliptique, sa variation a été déterminée, au dernier siècle, par des observations faites au gnomon avec une précision suffisante pour mettre en évidence des changements 24 fois moindres que ceux du périhélie. Voici quelques-unes de ces mesures, que Laplace a fait recalculer avec soin :

Dates.	Observateurs.	Obliquité observée.	Obliquité calculée.
		° ′ ″	° ′ ″
— 1100	Tchéou-Kong, en Chine........	23.52	23.51. 8
1000	Ben-Jounis, en Égypte...	23.34.36	23.34.20
1280	Cochéou-King, en Chine..... .	23.32. 2	23.32. 6
1437	Ouloug-Beg, à Samarcande.....	23.31.48	23.30.50
1750	Bradley, à Greenwich.........	23.28.18	23.28.20
1850	Observatoire de Paris.........	23.27.32	23.27.32

La dernière colonne a été calculée en prenant pour point de départ l'obliquité mesurée en 1850 et en supposant la variation de — 48″ par siècle. On voit avec quelle précision les observations les plus anciennes sont représentées. Il y a ici deux conséquences à tirer : 1° les observations faites au gnomon avaient un caractère bien remarquable d'exactitude; 2° l'obliquité de l'écliptique décroît bien réellement de 48″ par siècle, à très peu près.

Ces faits ne sont pas particuliers à l'orbite terrestre; on en retrouve l'équivalent pour les autres planètes (¹). Les éléments de leurs orbites subissent aussi des variations séculaires. Il n'y a d'exception que pour les durées des révolutions sidérales, que l'on retrouve toujours les mêmes, aujourd'hui ou au temps d'Hipparque ou des plus anciens observateurs chinois. Comme ces durées sont liées aux grands axes par la troisième loi de Kepler, il faut conclure de ce qui précède que les grands axes sont eux-mêmes invariables. C'est là évidemment un élément de stabilité pour le système solaire, et c'est le triomphe de la Mécanique céleste d'avoir, à la fois, prouvé théoriquement cette invariabilité et expliqué les variations progressives des autres éléments.

Satellites.

Les satellites de Jupiter ont été découverts en 1610 par Galilée. Ç'a été le premier résultat astronomique de l'invention des lunettes. Une simple lorgnette d'opéra les fait voir. Il n'en est plus de même des satellites des autres planètes, qui tous exigent des

(¹) La théorie elliptique est incapable de rendre compte de ces variations. Il fallait néanmoins en tenir compte après les avoir déterminées comme nous venons de le faire. C'étaient des éléments empiriques qu'on était bien forcé d'introduire, du temps de Kepler jusqu'à Newton, dans les Tables des planètes, comme on l'a vu au Chapitre V.

lunettes puissantes. On n'a même jamais observé en France ceux de Neptune, d'Uranus et l'un des satellites de Mars.

Les quatre satellites de Jupiter se meuvent dans des plans peu inclinés sur l'orbite de leur planète. Ils passent donc, presque à chaque opposition, dans le cône d'ombre qu'elle projette derrière elle et y sont éclipsés. L'observation de ce phénomène est facile et comporte une certaine précision. On en déduit les périodes synodiques moyennes :

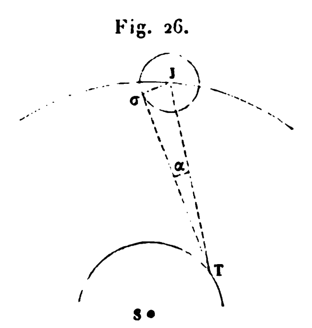
1er satellite............	1j,7698605
2e »	3,5540942
3e »	7,1663872
4e »	16,7535524

De celles-ci on déduit les révolutions sidérales.

On a construit pour ces satellites de véritables Tables par lesquelles on calcule les dates des éclipses qui ont lieu chaque année. Celles-ci sont publiées dans la *Connaissance des Temps*. Nous verrons plus tard le parti que l'on a tiré de ces éclipses pour la détermination des longitudes géographiques et pour mesurer la vitesse de la lumière.

Les rayons de ces orbites presque circulaires s'obtiennent à l'équatorial. L'observateur, placé en T (*fig.* 26), mesure micrométriquement la distance angulaire du satellite σ au centre J de la planète, au

Fig. 26.



moment de la plus grande élongation ; il obtient ainsi un angle $\sigma TJ = \alpha$ d'où l'on tire le rayon σJ par le triangle σJT, rectangle en σ. On a en effet, à cet instant,

$$\sigma J = a' = TJ \sin \alpha.$$

Or TJ est donné par les éphémérides en parties de l'unité astronomique, c'est-à-dire du demi-grand axe de l'orbite terrestre. Pour le premier satellite, par exemple, on trouve

$$\sigma J \text{ ou } a' = 0{,}00188,\quad T' = 1^{j},769138.$$

On en déduit pour la constante $K^{v} = \frac{a'^3}{T'^2}$, relative à Jupiter et à son système, la valeur 0,0000000071563.

C'est à peu près la millième partie de la constante K du système solaire. Pour avoir le rayon a'' de l'orbite d'un autre satellite de Jupiter, il suffira dès lors de déterminer la durée T'' de sa révolution et d'appliquer la formule $a'' = \sqrt[3]{K^{v} T''^2}$.

La Terre a aussi un satellite, la Lune, mais sa distance ne saurait être obtenue ainsi en parties de l'unité astronomique, parce que nous faisons partie de ce petit système. Par d'autres procédés dont il sera question plus loin, on trouve pour cette distance 0,0025748. Voici le tableau de ces divers systèmes avec les constantes qui s'y rapportent; nous en verrons bientôt l'importante signification mécanique.

		Distances des satellites.	Durées des révolutions.	Constantes képlériennes.
Soleil....		1,000000	365^{j},256	$K = 0{,}0000074958$
La Terre...		0,0025748	27,321660	$K^{III} = \frac{K}{328000}$ (1)
Mars......	1er	0,00006281	0,318924	$K^{IV} = \frac{K}{3078000}$
	2^{e}	0,00015686	1,26243	
Jupiter....	1er	0,0028188	1,769138	$K^{V} = \frac{K}{1047}$
	2^{e}	0,0044846	1,551181	
	3^{e}	0,0071537	7,154553	
	4^{e}	0,0125840	16,689019	
Saturne...	1er	0,0012422	0,942424	$K^{VI} = \frac{K}{3474}$
	2^{e}	0,0015937	1,370217	
	3^{e}	0,0019691	1,887904	
	4^{e}	0,0025362	2,736916	
	5^{e}	0,0035228	4,517303	
	6^{e}	0,0081839	15,9453	
	7^{e}	0,0099095	26,3113	
	8^{e}	0,0238210	79,32936	

(1) Ce résultat n'est que provisoire et sera rectifié plus loin, p. 142.

		Distances des satellites.	Durées des révolutions.	Constantes képlériennes.
Uranus....	1er	0,0012810	2j,520383	$K^{VII} = \frac{K}{22650}$
	2e	0,0017854	4,144181	
	3e	0,0029320	8,705897	
	4e	0,0039159	13,463269	
Neptune...		0,0023717	8,876900	$K^{VIII} = \frac{K}{19450}$

CHAPITRE IX.

DERNIER MOT SUR LE SYSTÈME DU MONDE DES ANCIENS.

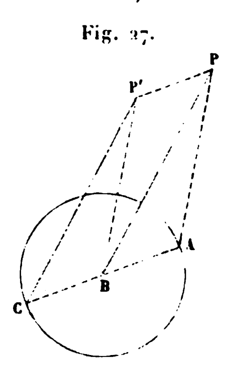
Tout y était conçu en vue de sauvegarder l'idée d'une Terre immobile et placée au centre de l'univers.

Ce système n'est plus bien compris aujourd'hui; du moins personne n'a expliqué pourquoi les Anciens ont adopté un mode de circulation, pour les planètes Mars, Jupiter et Saturne, consistant dans un épicycle se mouvant sur un déférent, et un autre mode, pour les planètes Mercure et Vénus, consistant dans un épicycle dont le centre est fixé sur un rayon mobile allant de la Terre au Soleil. On ne sait plus trop pourquoi les Anciens ont placé Mars, en opposition, à une distance supérieure à celle du Soleil, et pourquoi ils ont privé Vénus et Mercure de leurs phases principales en les faisant passer en deçà du Soleil à leurs deux conjonctions, en sorte qu'on devrait observer aujourd'hui, avec nos lunettes, deux genres différents de passages sur le Soleil. C'est qu'on oublie le mouvement diurne auquel participent tous les astres sans exception, et auquel toute théorie doit satisfaire aussi bien qu'au mouvement de circulation autour du Soleil. Les Anciens n'ont jamais perdu de vue la nécessité de représenter ces deux ordres de mouvements à la fois. S'ils avaient fait abstraction du premier, comme Tycho dans son malheureux essai, il leur aurait été facile d'obtenir une représentation géométriquement parfaite du monde solaire en appliquant, à toutes les planètes, une des deux solutions que nous offre la théorie du mouvement apparent. Voici les deux solutions.

Soient P une planète, A la Terre, B le Soleil dans leurs positions réelles (*fig.* 27). Si nous transportons la Terre de A au centre, en B, et le Soleil par conséquent de B en C, on n'altérera pas les directions observées AB, AP (les seules choses que nos sens nous fassent

apprécier), pourvu que nous transportions aussi la planète de P en P′ sur la droite PP′ égale et parallèle aux déplacements AB de l'observateur et BC du Soleil. Pour tenir compte des deux mouvements de révolution, il suffira donc de faire marcher la planète P′ autour du centre mobile P, dans un épicycle de rayon PP′ dont le centre P parcourra un cercle déférent décrit, autour de B, avec le rayon BP.

Fig. 27.



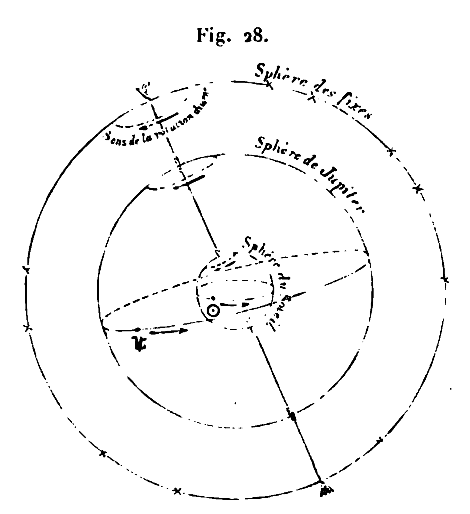
C'est la solution que les Anciens ont appliquée aux planètes extérieures, sauf qu'ils ont laissé indéterminés les rayons BP et PP′ dont le rapport seul est fixé par les observations; de plus ils ont profité de cette indétermination pour satisfaire à une condition que nous allons faire connaître. Mais, à cause de cette condition même, cette solution était inapplicable aux planètes intérieures.

On peut aussi transporter BP parallèlement à lui-même en CP′, et, comme BP est constant, cela revient, pour l'observateur transporté en B, à faire circuler la planète autour du point mobile C dans un épicycle de rayon CP′ égal à celui de son orbite réelle. C'est le système que les Anciens ont appliqué aux planètes intérieures en profitant de l'indétermination des rayons BC et CP′, dont le rapport seul est fixé par les observations, pour satisfaire à la condition susdite. A cause de cette condition même, cette seconde solution n'était pas applicable aux planètes extérieures. D'ailleurs l'une et l'autre conduisent, pour la parallaxe annuelle, aux formules dont nous nous servons.

Cette condition impérieuse, c'est qu'il n'y a pas d'autre moyen de communiquer à tout le système planétaire et aux étoiles le mouvement de rotation diurne, en laissant la Terre immobile, que d'attacher tous ces astres à diverses sphères transparentes concentriques,

emboitées l'une dans l'autre, tournant autour du même axe et recevant de la dernière, celle qui porte les étoiles fixées comme des clous dans sa concavité, un mouvement de rotation parfaitement uniforme. Il faut se représenter l'épicycle de chaque planète comme un cercle monté sur une tige qui glisserait dans une rainure de sa

Fig. 28.



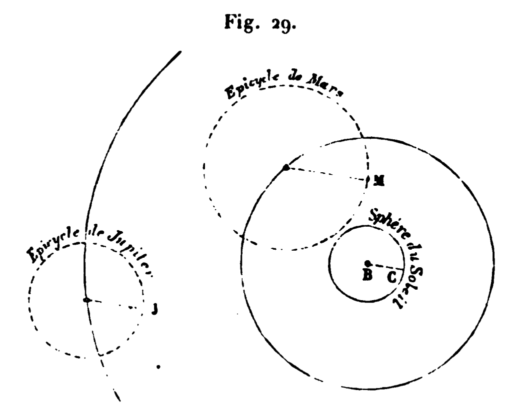
sphère propre. Il y avait ainsi une sphère ou un ciel de cristal par planète, et une sphère particulière pour les étoiles : c'est ce que j'ai tâché de représenter par la *fig.* 28. Mais il fallait avant tout que chaque planète pût se mouvoir sur son épicycle sans heurter et briser la sphère suivante.

Cette condition impérieuse de ne pas laisser pénétrer une planète dans le ciel qui la suit sera satisfaite, pour les planètes extérieures, par le premier système de déférents et d'épicycle. Chose curieuse, elle conduit, pour Mars (*fig.* 29), à une construction démentie par les observations modernes. Ici $\frac{R}{r} = \frac{10}{15}$. Ptolémée a donc dû mettre Mars en opposition plus loin de nous que le Soleil, tandis qu'il en est deux fois plus près ([1]).

([1]) Cette erreur a été signalée par Tycho, mais on n'a jamais su comment le célèbre Astronome a pu constater, par des observations faites à l'œil nu, que Mars en opposition est plus près de nous que le Soleil.

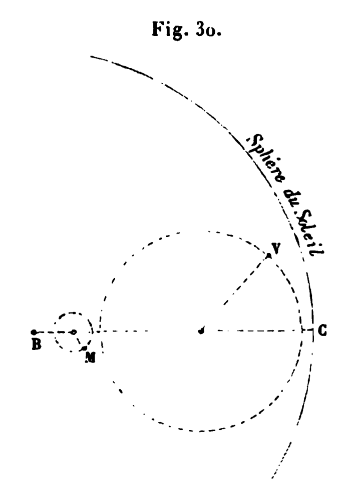
Mais, pour les planètes intérieures, l'obligation de ne pas les laisser pénétrer d'une sphère dans l'autre a conduit les Anciens à adop-

Fig. 29.



ter le second système, et même à reporter le centre de l'épicycle de chacune de ces planètes sur le rayon BC, entre C et B, tout en conservant, bien entendu, le rapport $\frac{R}{r}$ (*fig.* 30).

Fig. 30.



Or c'est cela qui supprime presque toutes les phases de ces planètes.

On sait combien Galilée, en les observant pour la première fois avec sa lunette, resta surpris devant ce phénomène imprévu ([1]). Il

([1]) On prétend pourtant qu'un auditeur de Copernic lui avait posé cette diffi-

n'osa publier sa découverte que sous le voile d'un anagramme :

Hæc immatura a me jam frustra leguntur. o. y.

« C'est en vain que je contemple ces phénomènes : la question n'est pas encore mûre pour moi. » Il en fit connaître plus tard le sens par ce joli vers, lorsqu'il se fut bien assuré de l'interprétation des faits :

Cynthiæ figuras emulatur Mater amorum.

Les Anciens auraient bien facilement rendu à Mars en opposition sa vraie place et à Vénus toutes ses phases, s'ils n'avaient pas craint de casser leurs cieux cristallins ([1]).

Certes ce n'est pas la complication des excentriques ou des épicycles qui a dû effrayer les modernes novateurs. Copernic lui-même et ses successeurs avaient pieusement conservé les excentriques. Tout cet échafaudage géométrique, y compris les épicycles de la parallaxe annuelle, se réduit, en analyse, à quelques termes périodiques exprimés par des sinus ou des cosinus : or, sous ce rapport, nos théories modernes sont bien autrement compliquées. Ce qui a fini par choquer réellement quelques bons esprits, c'est l'absurdité inhérente au mécanisme imaginé pour reproduire l'universel mouvement diurne, mécanisme indispensable quand on pose en principe l'immobilité de la Terre ; ce sont ces cieux de cristal emboîtés, recevant la rotation nécessaire d'un premier mobile, à peu près comme les rouages d'une horloge, et fort exposés à être cassés par une planète mal placée ou par une comète vagabonde, alors qu'il suffisait d'at-

culté : « Si votre système était vrai, Vénus devrait présenter la même succession de phases que la Lune. » Copernic aurait répondu : « Si jamais on parvient à distinguer la figure de Vénus, je crois qu'on y reconnaîtra effectivement toutes ces phases ». D'après le système des Anciens, Vénus devait osciller seulement entre l'invisibilité et la phase du premier ou du dernier quartier.

([1]) Enfin il ne faut pas oublier que dans ce système, qui a été celui, non de Ptolémée seul, mais de toute l'antiquité, et qui était adopté universellement par les modernes il n'y a pas trois siècles, un épicycle n'était pas censé se mouvoir parallèlement à lui-même pendant que son centre décrivait le déférent. Pour les Anciens, les choses se passaient comme si l'épicycle était porté par un rayon en forme de bras, glissant dans une rainure de la sphère. Dès lors cet épicycle tournait autour d'une normale au plan de cette rainure, et la planète ne devait plus se mouvoir sur cet épicycle avec la vitesse du Soleil sur son orbite, mais avec sa vitesse synodique par rapport au Soleil.

tribuer le mouvement de rotation diurne à la Terre pour faire disparaître cet étonnant artifice.

Des géomètres aussi profonds que l'étaient les Anciens, depuis Platon, Archimède, jusqu'à Euclide et Apollonius de Perge, etc., auraient certes reconnu bien vite le vrai système du monde dont tous les éléments étaient dans leurs mains, et que proclamaient d'ailleurs quelques dissidents, s'ils n'avaient dû avant tout assurer à la Terre son immobilité, sorte de dogme naïf, solidement ancré dans le sentiment de tous par la tradition et le témoignage de nos sens. Il a fallu, vers l'époque de la Renaissance, un siècle de grande navigation tout autour de notre globe pour dissiper ces antiques rêveries et bien faire sentir que la Terre, loin d'avoir toute l'immensité et l'importance qu'on lui attribuait, était au fond bien petite, comme l'écrivait Christophe Colomb à la reine d'Espagne.

LIVRE III.

INTRODUCTION DE LA MÉCANIQUE DANS L'ASTRONOMIE.

Jusqu'ici l'Astronomie a été purement géométrique. On ne croyait guère avant le XVIIe siècle que les mouvements célestes, si parfaits, absolument perpétuels, pussent rentrer dans le domaine de la Mécanique des corps terrestres. Mais les lois expérimentales de Kepler vinrent montrer que ces mouvements n'étaient rien moins que parfaits : il leur manquait à la fois l'uniformité et la circularité. Quant à la perpétuité, qui restait seule pour les différencier des mouvements terrestres, les expériences de Galilée sur la chute des corps, et surtout celles d'Huygens, plus délicates encore, sur le pendule oscillant, avaient fait comprendre que si les mouvements terrestres finissent par s'épuiser, c'est la suite, non d'une infériorité de nature, mais des résistances que nos mécanismes et nos mobiles éprouvent ici-bas. Plus on atténue ces résistances et plus les mouvements, une fois imprimés, durent. Ils persisteraient donc indéfiniment si l'on pouvait réaliser, sur notre globe, les conditions dans lesquelles les mobiles se trouvent dans les espaces célestes, c'est-à-dire un vide absolu, indéfini, et l'absence de tout choc, de tout frottement. Cette dernière différence entre les astres et les corps terrestres s'évanouissait à son tour pour faire place à l'idée de l'inertie de tous les corps de la nature, lesquels sont par eux-mêmes incapables de modifier leur état de repos ou de mouvement et qui ayant à un certain moment, en vertu d'une cause quelconque, reçu une vitesse dans une direction donnée, se meuvent indéfiniment dans cette direction et avec cette vitesse, à moins qu'une cause étrangère, une force, n'intervienne pour infléchir peu à peu cette direction et altérer cette vitesse. Le mou-

vement curviligne des planètes ne prouve donc qu'une chose, c'est qu'ayant été primitivement mises en mouvement par une cause quelconque dont nous n'avons pas à nous préoccuper, elles sont, sous nos yeux, sollicitées par des forces dont il faut tâcher de connaître, non pas l'intime nature, mais la direction et l'intensité.

CHAPITRE X.

INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DES LOIS EXPÉRIMENTALES DE KEPLER. — PARTIE SYNTHÉTIQUE.

Loi de la force attractive du Soleil.

La première loi expérimentale, celle d'après laquelle les aires décrites par le rayon vecteur d'une planète, *comptées*, comme le font les Astronomes, *autour du centre du Soleil*, croissent proportionnellement au temps, montre que cette force est constamment dirigée, non pas vers un point idéal comme le centre des épicycles ou des excentriques des Anciens, mais vers le centre d'un corps matériel, le plus grand de tout notre système.

La troisième loi, combinée avec le plus simple théorème d'Huygens sur la force centrifuge, nous apprend que la force qui pousse les planètes vers le Soleil, ou en vertu de laquelle le Soleil attire les planètes, varie en raison inverse du carré des distances. En effet, les orbites des planètes étant à peu près circulaires, la force qui retient dans son orbite une planète de distance r et de vitesse V aura pour expression, en négligeant l'excentricité,

$$F = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Pour une autre planète on aura de même

$$F' = \frac{V'^2}{r'} = \frac{4\pi^2 r'}{T'^2};$$

or, d'après la troisième loi (p. 91),

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{r'^3}{T'^2} = K:$$

donc

$$F r^2 = F' r'^2 = 4\pi^2 K = \text{const.}$$

Signification mécanique des constantes de Kepler.

Cela nous donne immédiatement le sens mécanique de la constante keplérienne K quand elle est multipliée par $4\pi^2$. En effet F, relatif à la distance r, est l'accélération produite par l'action solaire, c'est-à-dire la vitesse imprimée à la planète vers le Soleil au bout de chaque unité de temps. Puisque $F = \frac{4\pi^2 K}{r^2}$, cette vitesse ne dépend pas du mobile lui-même, petit ou grand, mais seulement de sa distance r, en sorte que, si toutes les planètes étaient ramenées à une même distance 1 du Soleil, sans vitesse acquise, elles marcheraient vers lui avec une même accélération égale à $4\pi^2$ K. Or, en prenant le jour pour unité de temps et la distance de la Terre au Soleil pour unité de distance, nous avons trouvé

	log K	4,87480—10
Ajoutons		
	log $4\pi^2$	1,59636
	log $4\pi^2$ K	6,47116—10

nous aurons $4\pi^2 K = 0{,}0002959$. Cela veut dire que si une force *constante*, de cette énergie-là, agissait un jour entier sur un mobile quelconque, elle lui communiquerait, au bout de ce laps de temps, une vitesse de 0,0002959 par jour (¹).

Si on veut prendre le mètre et la seconde pour unités, il faut multiplier ce nombre par celui qui exprime la distance de la Terre au Soleil, à savoir 23405×6378393^{m}, et le diviser par le carré de 86400^{s}. On trouve $0^{m},006$. Ainsi l'espace parcouru, au bout de la première seconde, par l'une quelconque des planètes placées sans vitesse initiale à la distance 1 du Soleil, ne serait que de 3^{mm}.

L'attraction agit sur toutes les parties du corps attiré.

Mais voici ce qui relève singulièrement le rôle mécanique de cette force. Puisque toutes les planètes grosses ou petites

(¹) En réalité, un corps tombant vers le Soleil, de la distance 1, serait soumis à une force progressivement croissante, et acquerrait, au bout d'un jour, une vitesse plus grande que 0,0002959.

l'éprouvent de la même manière, quelle que soit leur masse, il faut qu'elle agisse sur chaque parcelle de matière avec la même intensité. La quantité de mouvement produite vers le Soleil est donc, pour chaque planète, proportionnelle à sa masse, et il en serait de même de la pression que chaque planète exercerait sur un obstacle qui l'empêcherait de se mouvoir vers le Soleil. La mesure de cet effort énorme est le produit de l'accélération par la masse, c'est-à-dire $4\pi^2 Km$.

La nature terrestre ne nous offre qu'un exemple d'une force pareille. C'est la pesanteur, en vertu de laquelle un roc ou un grain de poussière, une pièce d'or ou une plume tombant *dans le vide,* acquièrent au bout d'une seconde la même vitesse $G = 9^{m},7981$ (à l'équateur), en sorte qu'on est conduit à exprimer par mG la pression P exercée par un corps de masse m contre l'obstacle qui l'empêche de tomber vers le centre de la Terre.

L'attraction est proportionnelle à la masse du corps attirant.

La troisième loi de Kepler s'applique aussi aux systèmes secondaires formés autour de chaque planète par ses satellites. Ces planètes sont donc elles-mêmes des centres de force, et l'accélération due à l'une quelconque d'entre elles, ayant K' pour constante keplérienne, aura pour valeur $4\pi^2 K'$ à la distance 1. Or la force que Jupiter, par exemple, exerce autour de lui sur ses satellites doit s'étendre au Soleil lui-même et bien au delà. Si donc le Soleil et Jupiter étaient abandonnés à eux-mêmes, à la distance 1, sans autre mouvement que celui qui naîtra de leur action réciproque, ils marcheraient l'un vers l'autre, Jupiter avec l'accélération $4\pi^2 K$ due à l'action du Soleil, le Soleil avec l'accélération $4\pi^2 K'$ due à celle de Jupiter. Et si on plaçait entre eux un obstacle capable de les empêcher de se mouvoir l'un vers l'autre, cet obstacle éprouverait deux pressions opposées, l'une égale à $4\pi^2 K'M$ de la part du Soleil dont la masse M est sollicitée par la force $4\pi^2 K'$ due à la présence de Jupiter, l'autre égale à $4\pi^2 KM'$ de la part de Jupiter dont la masse M' est sollicitée par l'attraction solaire $4\pi^2 K$.

On admet généralement en Mécanique, du moins pour les corps nis par des liens matériels, que l'action est égale à la réaction. S'il

en est ainsi on aura

$$4\pi^2 K' M = 4\pi^2 K M',$$

en sorte que les forces attractives des deux astres seront proportionnelles à leurs masses respectives. En d'autres termes $\frac{K'}{K} = \frac{M'}{M}$; par conséquent, les rapports des constantes képlériennes de la page 98 ne sont autre chose que ceux des masses des planètes à la masse du Soleil. Celle de la Terre est donc $\frac{1}{328000}$ si l'on prend la masse du Soleil pour unité; celle de Jupiter est $\frac{1}{1047}$, et ainsi de suite.

Attraction des sphères homogènes.

Il se présente ici une vérification remarquable. Les corps célestes sont sensiblement sphériques, et c'est à partir de leur centre que les astronomes comptent les distances. Puisque l'attraction du Soleil ou d'une planète sur un point extérieur est proportionnelle à sa masse et en raison inverse du carré de la distance de ce point à son centre, les déductions précédentes montrent que cette force agit comme si la masse entière était condensée en ce centre. Il faut donc examiner dans quel cas, pour quel genre d'attraction une masse sphérique homogène, ou composée de couches homogènes, agit de cette façon sur un point extérieur. On démontre, en Mécanique, que cela ne peut avoir lieu que si la loi de l'attraction exercée par les diverses parties de cette masse est de la forme Ar ou de la forme $\frac{B}{r^2}$, A et B étant des constantes quelconques. Il ne saurait être question ici de la première, car, dans le système solaire les forces centrales diminuent au lieu d'augmenter avec la distance. Reste donc la seconde, qui est justement celle que nous révèlent d'autre part les mouvements de notre système. On voit la portée de cette concordance. Si l'on trouvait que l'attraction d'une sphère, résultant de l'attraction de ses particules, ne doit pas être estimée à partir de son centre, et c'est ce qui aurait lieu pour une attraction $\frac{B}{r^3}$ par exemple, il faudrait douter que les forces célestes que nous étudions résultassent de l'action combinée de toutes les molécules des globes qui les exercent.

Énoncé nouveau de la troisième loi de Kepler.

Ces notions nous permettent d'exprimer les forces d'une manière commode. Si on désigne par f l'attraction de l'unité de masse à l'unité de distance, celle d'un corps de masse M sera fM, en sorte que, pour le Soleil et les planètes, au lieu d'user des expressions $4\pi^2 K$, $4\pi^2 K'$, ..., nous écrirons fM, fm, fm', ..., en désignant par M la masse du Soleil, par m, m', m'', ... celles des planètes. On remarquera du reste que nous ne connaissons jusqu'ici que les rapports $\frac{m}{M}$, $\frac{m'}{M}$, ... de ces masses (p. 98).

La conclusion à laquelle nous venons d'arriver montre que l'énoncé de la troisième loi expérimentale doit être légèrement modifié. En effet, si les masses des planètes sont fort petites par rapport à celle du Soleil, elles ne sont pourtant pas négligeables, et il convient d'en tenir compte. Considérons le couple en mouvement formé par le Soleil et une planète, et supposons qu'aucune autre force que leurs attractions mutuelles n'intervienne. Celle du Soleil sur la planète sera $\frac{fM}{r^2}$; celle de la planète sur le Soleil sera $-\frac{fm}{r^2}$. Le Soleil étant lui-même en mouvement, on fait aisément voir que ces deux astres décrivent des ellipses semblables autour de leur centre de gravité commun. Pour réduire le Soleil à l'immobilité et le prendre, comme le font les astronomes, pour origine des distances mesurées, il faut lui appliquer une force égale et contraire à $-\frac{fm}{r^2}$. Mais aussi, pour ne pas troubler les mouvements relatifs, il faudra appliquer la même force à la planète. Celle-ci étant donc sollicitée vers un centre fixe par la résultante $f(M+m)$, on aura dans le cas de la Terre

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

dans le cas de Jupiter,

$$f(M+m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2},$$

et ainsi de suite. Dès lors ce n'est pas

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$$

qu'il faut écrire, mais bien

$$\frac{a^3}{T^2\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \frac{a'^3}{T'^2\left(1+\frac{m'}{M}\right)}.$$

et l'on aura pour la constante du système solaire, en faisant $a = 1$ et $T = 365^j,256$,

$$Mf = \frac{4\pi^2}{T^2\left(1+\frac{m}{M}\right)}.$$

Puisque $\frac{m}{M}$ est égal à $\frac{1}{328000}$, il faudra retrancher, de la constante que nous avions d'abord adoptée, sa 328000e partie, ce qui fera sur le logarithme une diminution de 14 unités du septième ordre :

$$\log\frac{4\pi^2}{T^2} = 6,4711652-10$$
$$-14$$
$$\log fM = 6,4711638-10$$
$$fM = 0,000295913$$

C'est cette constante que les Français désignent le plus souvent par μ et les Allemands par k^2.

Loi de la force déduite de la nature géométrique de l'orbite.

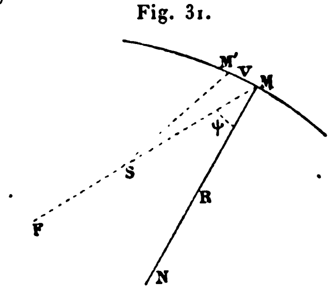
Il n'y a qu'un point faible dans cette théorie. Nous avons supposé les orbites circulaires, tandis que ce sont en réalité des ellipses dont le Soleil occupe un foyer ; mais il est facile de montrer que, dans une telle orbite, la force centrale varie en raison inverse du carré des distances.

Le théorème d'Huygens, dans toute sa généralité, a pour expression

$$F\cos\psi = \frac{V^2}{R},$$

F n'étant plus une force centrale, mais la résultante des forces quelconques qui agissent sur le mobile, ψ l'angle de cette résultante (¹) avec la partie MN de la normale à la courbe, au point considéré, sur laquelle se compte le rayon de courbure R en ce point, et V la vitesse (*fig.* 31).

Fig. 31.



Appliquons-le au cas du système solaire où la force F est dirigée suivant le rayon vecteur $SM = r$, puisque les aires comptées autour du point S sont proportionnelles au temps. Soit σ l'élément MM' de la trajectoire décrite dans l'élément de temps θ, en sorte que $V = \frac{\sigma}{\theta}$, et C le double de l'aire décrite par r dans l'unité de temps: L'aire élémentaire SMM' aura ainsi deux expressions égales

$$\tfrac{1}{2} r\sigma \cos\psi = \tfrac{1}{2} C\theta.$$

Par conséquent, pour le cas d'une force centrale, on aura

$$\frac{\sigma}{\theta} = V = \frac{C}{r\cos\psi} \quad \text{d'où} \quad Fr^2 = \frac{C^2}{R\cos^3\psi}.$$

Cette relation fera connaître la force quand on donnera la nature de la trajectoire (par R et ψ), ou bien la nature de la trajectoire quand la force sera donnée. Ici la courbe est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer. Or, dans une telle courbe, $R\cos^3\psi = p$ demi-paramètre. Donc

$$Fr^2 = \frac{C^2}{p} = \text{const.}$$

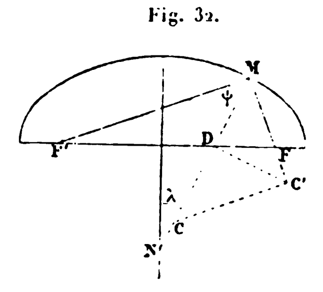
Ainsi F varie bien réellement en raison inverse du carré de la

(¹) C'est le complément de l'angle I, p. 115, t. I.

distance, et tout ce qui précède se trouve justifié. Nous nous trouvons encore ici en présence d'un cas où la théorie, déduite de lois expérimentales, en élargit singulièrement la portée. $R\cos^3\psi = p$ n'appartient pas seulement à l'ellipse, mais aussi aux paraboles rapportées au foyer, et aux branches d'hyperbole tournant leur concavité vers ledit foyer. Ainsi toutes ces courbes sont des trajectoires possibles dans le système solaire. On sait en effet que les comètes décrivent des paraboles, ou du moins des ellipses tellement excentriques qu'il est impossible aux observateurs de les distinguer d'une parabole.

Arrêtons-nous ici pour démontrer, à l'aide des formules du t. I (p. 328), la proposition $R\cos^3\psi = p$.

Fig. 32.



Dans la *fig.* 32, où MN est la grande normale faisant l'angle ψ avec le rayon $FM = r$, on a, par le triangle MDF,

$$\frac{\sin\psi}{\cos\lambda} = \frac{DF}{MF} = \frac{ae - Ne^2\sin\lambda}{a - ex} = \frac{a - Ne\sin\lambda}{a - Ne\sin\lambda}e = e.$$

De $\sin\psi = e\cos\lambda$ on tire $\cos\psi = \sqrt{1 - e^2\cos^2\lambda} = \frac{a}{N}$. Or on a vu que

$$R = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2);$$

donc

$$R\cos\psi = \frac{N^2}{a}(1 - e^2),$$

$$R\cos^2\psi = N(1 - e^2) = n, \quad (^1)$$

$$R\cos^3\psi = a(1 - e^2) = p.$$

(1) n est ici la petite normale.

Il est bon d'examiner l'expression de $R\cos\psi$. Puisque

$$r = a - ex, \quad r' = a + ex \quad \text{et} \quad x = N\sin\lambda,$$

on aura

$$rr' = N^2(1 - e^2);$$

donc

$$R\cos\psi = \frac{rr'}{a} = r^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

et, comme

$$F = \frac{V^2}{R\cos\psi},$$

il vient

$$V^2 = Fr^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

en désignant ici par μ la constante $(M + m)f$.

Étant données la vitesse et la direction du mobile, déterminer sa trajectoire.

Déterminer l'orbite parcourue par un mobile de masse m, actuellement placé à la distance r du Soleil, et animé d'une vitesse V dans une direction inclinée de l'angle ψ sur le rayon vecteur.

La force centrale est $(M + m)f$. Désignons-la ici par μ. La dernière formule donne déjà le demi-grand axe a par $\frac{1}{a}$, puisque V, r et μ sont connus.

Si $V^2 < \frac{2\mu}{a}$, $\frac{1}{a}$ sera positif, la courbe sera une ellipse.

Si $V^2 = \frac{2\mu}{a}$, $\frac{1}{a} = \infty$, la courbe sera une parabole.

Si $V^2 > \frac{2\mu}{a}$, $\frac{1}{a}$ est négatif et on a une hyperbole.

Il est facile d'obtenir R (*fig.* 32) par la formule

$$Fr^2 = \frac{V^2r^2}{R\cos\psi} = \mu,$$

puisque r, V et ψ sont donnés. On portera R sur la normale en MC; en le projetant sur MF, en MC', on aura $R\cos\psi$. En projetant MC' sur la normale, on aura, en MD, $R\cos^2\psi = n$. Ainsi le point D

sera sur l'axe, et la droite DF en donnera la direction. Si on construit le second foyer F', on aura l'excentricité, que l'on déduirait d'ailleurs de la projection de MD sur MF, ce qui donnerait p. L'orbite sera donc entièrement connue.

Remarquez ici que l'espèce de section conique que doit décrire le projectile est indépendante de l'angle ψ, c'est-à-dire de la direction où on le lance. Elle ne dépend que de la vitesse qu'on lui imprime.

Pour l'hyperbole, il ne peut être question ici que de la branche pour laquelle $R\cos^3\psi$ est positif, c'est-à-dire pour laquelle ψ est un angle aigu. C'est celle qui présente sa concavité au foyer où le Soleil est placé. Pour l'autre branche, $R\cos^3\psi$ est négatif.

Enfin, dans le cas de ces orbites à branches infinies, il n'y a pas de temps de révolution. La troisième loi de Kepler subsiste encore, mais sous une autre forme. Nous avons vu que

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu = \frac{C^2}{p};$$

de là l'énoncé applicable à tous les cas : les aires décrites par le rayon vecteur dans le même temps, pour tous les mobiles qui se meuvent autour du Soleil, sont en raison des racines carrées des paramètres de leurs orbites.

Autres orbites.

1° Si l'ellipse décrite par un mobile autour du Soleil avait son centre et non son foyer au Soleil, la loi d'attraction serait toute différente. Les symboles adoptés en Géodésie (t. I, p. 327) donneraient

$$r\cos\psi + \mathrm{ON}\cos\lambda = \mathrm{N},$$

et, comme $\mathrm{ON} = \mathrm{N}e^2\cos\lambda$, on aurait

$$r\cos\psi = \mathrm{N}(1 - e^2\cos^2\lambda) = \frac{a^2}{\mathrm{N}}.$$

Par suite,

$$R\cos^3\psi = \frac{a^4(1-e^2)}{r^4}.$$

La formule d'Huygens pour les forces centrales deviendrait

$$F = \frac{C^2 r}{a^4(1-e^2)}.$$

Ainsi l'attraction serait proportionnelle à la distance. Posons

$$\frac{F}{r} = \mu, \quad \text{d'où} \quad C^2 = \mu a^4(1-e^2).$$

Comme, d'autre part,

$$C = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T},$$

il en résulte que

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\mu}.$$

La durée de la révolution serait la même pour toutes les planètes. Si les orbites étaient circulaires et couchées sur le même plan, le mouvement du système se réduirait à une simple rotation avec une vitesse angulaire égale à $\sqrt{\mu}$. Les vitesses linéaires seraient $\sqrt{\mu}.r$, tandis que dans notre système elles sont $\sqrt{\frac{\mu}{r}}$, ce qui diffère beaucoup d'une rotation.

L'attraction newtonienne prend cette forme remarquable à l'intérieur d'une sphère homogène (¹). Si la densité de cette sphère était celle d'un gaz ou d'une simple nébulosité excessivement rare, des corpuscules très denses qui se mouvraient à l'intérieur décriraient sensiblement des ellipses concentriques à la sphère, avec une même durée de révolution.

2° Si l'orbite était une spirale logarithmique, ψ, complément de l'angle constant I sous lequel cette courbe est coupée par le rayon vecteur, serait constant lui-même. Or on a, pour toutes les courbes (t. I, p. 115),

$$ds = \frac{dr}{\sin\psi}, \quad dv = \frac{dr}{r}\cot\psi, \quad d\rho = -d\psi + dv, \quad R = \frac{ds}{d\rho},$$

(¹) En effet, pour un point placé à l'intérieur, à la distance r du centre, l'attraction des couches sphériques de rayon $> r$ est nulle ; seule celle de la sphère de rayon r, proportionnelle à sa masse $\frac{4\pi}{3}r^3$ et en raison inverse de r^2, subsiste. On voit que cette attraction est $f\frac{4}{3}\pi r$.

et comme ici $d\psi = 0$, on aura

$$R = \frac{r}{\cos\psi}.$$

L'équation $Fr^2 = \frac{C^2}{R\cos^3\psi}$ devient donc

$$F = \frac{C^2}{r^3\cos^2\psi};$$

par suite, la force centrale est inversement proportionnelle au cube de la distance. Bien que le mobile décrive une infinité de révolutions autour du centre, le temps au bout duquel il l'atteindra est fini, puisque l'aire totale décrite par le rayon vecteur, c'est-à-dire l'intégrale, de r à 0, de $\frac{1}{2}r^2 dv = \frac{1}{2}r\,dr\cot\psi$ est finie et égale à $\frac{1}{4}r^2\cot\psi$. En désignant Fr^3 par μ, ce temps serait $\frac{r^2}{4\sqrt{\mu}\sin\psi}$.

3° Supposons enfin qu'un mobile parcoure une branche d'hyperbole et que le centre de force soit au foyer extérieur. Dans ce cas ψ serait obtus, $\cos\psi$ négatif et l'on aurait

$$Fr^2 = -\frac{C^2}{p}.$$

La force centrale serait bien inversement proportionnelle au carré de la distance, mais répulsive. Nous en trouverons une application dans la théorie de la figure des comètes.

CHAPITRE XI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

On adoptera ici, pour poser les équations différentielles du mouvement, la décomposition de la force centrale indiquée par Maclaurin suivant trois axes rectangulaires. Prenons le centre du Soleil pour origine et désignons par x, y, z les coordonnées du mobile, par r son rayon vecteur, de sorte que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

Les composantes de la vitesse V suivant les trois axes seront

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt},$$

ce qui donne

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Les cosinus des angles du rayon vecteur avec les trois axes seront

$$\frac{x}{r},\quad \frac{y}{r},\quad \frac{z}{r}.$$

Cela posé, désignons par μ la force centrale $f(M+m)$ à la distance 1; cette force sera, à la distance r, $\frac{\mu}{r^2}$, et ses composantes suivant les trois axes seront

$$\frac{\mu x}{r^3},\quad \frac{\mu y}{r^3},\quad \frac{\mu z}{r^3}.$$

Comme cette force, dirigée vers l'origine, tend à diminuer les coordonnées du point attiré, on aura, pour les équations différentielles du mouvement,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

dont l'intégration complète introduira six constantes arbitraires. Elle s'effectue aisément en termes finis.

Ajoutons les équations après les avoir multipliées respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$. L'intégration donnera, en tenant compte de l'expression précédente de rdr,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\int \frac{2\mu r\,dr}{r^3}$$

ou bien

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

h étant une première constante arbitraire. Nous avons déjà obtenu cette importante relation par la voie synthétique, car nous verrons que $h = -\frac{\mu}{a}$.

Retranchons la première équation de la deuxième après les avoir multipliées respectivement par x et y, de manière à éliminer les seconds membres ; on aura

$$\frac{x\,d^2 y - y\,d^2 x}{dt^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c,$$

c étant une nouvelle constante. On aura pareillement, en allant de l'axe des y à celui des z, puis des z aux x,

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = c',$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{dt} = c''.$$

On élimine les différentielles en ajoutant ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par z, x, y,

$$0 = cz + c'x + c''y :$$

c'est l'une des intégrales cherchées. Elle représente le plan de l'orbite passant par l'origine. Si l'on désigne par N la longitude du nœud ascendant comptée dans le sens xy à partir de l'axe des x, et par i l'inclinaison, les formules du tome I, p. 55, donneront, en posant

$$C^2 = c^2 + c'^2 + c''^2,$$

$$\cos i = \frac{c}{C}, \quad \sin i \sin N = \frac{c'}{C}, \quad \sin i \cos N = -\frac{c''}{C}.$$

Les formules de la page 56, t. I, montrent que $xy' - yx'$ ou, en rétablissant le rayon pris pour unité, $r^2 \sin b \sin b' \sin(A' - A)$ est le double de la projection du triangle aboutissant aux sommets C, C'. Il en sera de même de $x(y' - y) - y(x' - x)$. Par conséquent, en passant aux différences infinitésimales, $x\,dy - y\,dx = c\,dt$ est la projection du double de l'aire décrite dans le temps dt par le rayon vecteur. De même, $c'\,dt$ et $c''\,dt$ représentent les projections sur les deux autres plans coordonnés du double de cette même aire.

Ces projections étant des constantes, il en sera de même du double de l'aire elle-même, qu'on peut désigner par $C\,dt$. On voit que ce résultat répond à la première loi de Kepler.

En désignant par $\mathcal{L}$ la longitude dans l'orbite, nous aurons comme intégrale première la relation

$$r^2 d\mathcal{L} = C\,dt, \tag{1}$$

dont nous avons déjà fait usage.

Effectuons les carrés des expressions de c, c', c'' en la forme indiquée, et en même temps ajoutons et retranchons

$$\frac{x^2 dx^2 + y^2 dy^2 + z^2 dz^2}{dt^2};$$

on aura

$$(x^2 + y^2 + z^2)\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$
$$- \frac{2xy\,dx\,dy + 2xz\,dx\,dz + 2yz\,dz\,dy + x^2 dx^2 + y^2 dy^2 + z^2 dz^2}{dt^2} = C^2,$$

c'est-à-dire

(2) $$r^2V^2 - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C^2.$$

Cette équation devient, avec la valeur de dt tirée de la relation (1) et en mettant $\frac{2\mu}{r} + h$ pour V^2,

$$\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)^2 = \frac{h}{C^2}r^4 + \frac{2\mu}{C^2}r^3 - r^2,$$

relation où l'on reconnaît aussitôt l'équation différentielle des coniques rapportées à leur foyer et à leur grand axe ([1])

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = -\frac{1}{ap}r^4 + \frac{2}{p}r^3 - r^2;$$

l'identification s'obtient en posant $h = -\frac{\mu}{a}$ et $C^2 = p\mu$. L'intégrale sera donc, avec la constante ϖ,

(3) $$r = \frac{p}{1 - e\cos(\zeta - \varpi)}.$$

C'est la seconde loi de Kepler.

L'intégrale de $r^2 d\zeta = C dt$ étendue à une révolution entière de durée T comprend le double de l'aire de l'ellipse et devient

$$2\pi a^2\sqrt{1 - e^2} = CT.$$

Élevons au carré et remplaçons C^2 par $p\mu$, on aura

(4) $$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = n^2 a^3,$$

n étant le moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}$ exprimé en parties du rayon. C'est la troisième loi de Kepler.

L'équation différentielle (2) en r et t, quand on y met pour h

([1]) On l'obtient en éliminant v entre l'équation des coniques $e\cos v = \frac{p}{r} - 1$ et sa différentielle $e \sin v = \frac{p}{r^2}\frac{dr}{dv}$.

C^2 leurs valeurs, prend la forme (nous reproduisons ici le calcul de la p. 46)

$$\frac{a}{\mu}\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2ar - r^2 - ap = a^2e^2 - (a-r)^2.$$

Pour extraire la racine carrée, posons

$$(5)\qquad a - r = ae\cos u;$$

nous aurons

$$\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,r\frac{dr}{dt} = ae\sin u.$$

Or (5) donne

$$r\,dr = a(1 - e\cos u)\,ae\sin u\,du;$$

par conséquent l'équation précédente devient

$$a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - e\cos u)du = dt,$$

d'où, en remplaçant $\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ par $\frac{1}{n}$,

$$(6)\qquad u - e\sin u = n(t - \theta),$$

θ étant une constante dont nous verrons la signification tout à l'heure. C'est l'intégrale que Kepler a obtenue géométriquement à l'aide du même angle auxiliaire u.

Lorsqu'on fait $u = 0$, l'équation (6) se réduit à $t = \theta$; comme $r = a(1 - e\cos u)$ devient alors $r = a - ae$, rayon vecteur du périhélie, on voit que θ est la date du passage de la planète en ce point de l'orbite. Si d'ailleurs on désigne par $\mathcal{L}_0$ la longitude moyenne à l'origine du temps t, par m l'anomalie moyenne, on aura

$$\mathcal{L}_0 + nt - \varpi = m = n(t - \theta),\quad \text{d'où}\quad \mathcal{L}_0 - \varpi = -n\theta.$$

Les six constantes arbitraires se ramènent donc aux six éléments de l'orbite adoptés par les astronomes, à savoir

$$a,\ e,\ \varpi,\ \mathcal{L}_0,\ i,\ N.$$

Pour exprimer, en fonction du temps et de ces constantes arbitraires, les coordonnées du mobile, prenons d'abord pour axe des

x' la trace du plan de l'orbite sur le plan primitif des x, y. Nous aurons, par les formules de la page 76,

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\mathcal{L} - \mathrm{N}), \\ y' &= r\cos i \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N}), \\ z &= r\sin i \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N}). \end{aligned}$$

Faisons tourner maintenant d'un angle N les axes des x' et des y' autour de l'axe des z, de manière à leur rendre leur première position; il viendra

$$\begin{aligned} x &= r[\cos(\mathcal{L} - \mathrm{N})\cos\mathrm{N} - \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N})\sin\mathrm{N}\cos i], \\ y &= r[\cos(\mathcal{L} - \mathrm{N})\sin\mathrm{N} + \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N})\cos\mathrm{N}\cos i], \\ z &= r\ \sin(\mathcal{L} - \mathrm{N})\sin i. \end{aligned}$$

Les coordonnées polaires r et $\mathcal{L}$ se calculent par les formules suivantes :

$$\begin{gathered} a^3 n^2 = \mu, \\ u - e\sin u = n(t - \theta), \\ r = a(1 - e\cos u), \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u, \\ \mathcal{L} = v + \varpi; \end{gathered}$$

elles sont donc fonctions du temps et des constantes a, e, ϖ, θ. Les six constantes a, e, ϖ, θ, i et N étant impliquées dans les expressions de x, y, z, celles-ci peuvent être considérées comme les intégrales des équations différentielles proposées; de fait, en les différentiant deux fois par rapport à t, on retombera sur ces équations.

CHAPITRE XII.

PERTURBATIONS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

Si les planètes n'avaient que des masses insignifiantes, comme les comètes ou les planéticules qui circulent entre les orbites de Mars et de Jupiter, les équations du Chapitre précédent suffiraient; les mouvements autour du Soleil s'accompliraient dans de véritables ellipses et les éléments de ces ellipses seraient de véritables constantes. Nous avons vu que tel n'est pas le cas de la nature : les éléments des orbites varient tous progressivement avec le temps sauf les grands axes. Il y a plus, lorsqu'on a déterminé ces variations comme nous l'avons fait, à l'aide des plus anciennes observations, et qu'on en tient compte dans le calcul des positions d'une planète quelconque sur l'ellipse qu'elle est censée parcourir actuellement, on trouve, entre l'observation et le calcul, de petits écarts, périodiques il est vrai, mais nullement négligeables. Et, comme les masses que nous venons de déterminer pour les planètes pourvues de satellites ne sont pas excessivement faibles, celles de Jupiter et de Saturne surtout, il faut en conclure que les variations susdites des constantes, ainsi que les écarts périodiques entre la théorie elliptique et les observations, sont le résultat des attractions planétaires que nous avons jusqu'ici négligées. Newton, le premier, en a tenu compte d'une manière toute géométrique. Il décomposait l'attraction du corps m' sur le mobile étudié m suivant deux droites, l'une dirigée de m en S, l'autre mP parallèle à m'S. La première composante s'ajoute à la force centrale qui sollicite ce mobile m, et en altère légèrement la loi sans troubler néanmoins l'uniforme description des aires par le rayon Sm; la deuxième ne troublerait pas le mouvement de la planète autour du Soleil si elle était égale à l'attraction de m' sur S. La différence variable de ces attractions est donc la seconde composante de l'action perturbatrice. Cette dernière doit être à son tour estimée suivant certaines directions telles

que la tangente, la normale à la courbe décrite, et la perpendiculaire au plan de l'orbite, de manière à permettre d'apprécier isolément les effets de ses composantes. C'est aussi de cette manière que nous chercherons à donner une idée des déviations si considérables que la Lune nous présente par rapport aux lois du mouvement elliptique. Mais cette voie toute synthétique ne peut être suivie bien loin. Les savants géomètres du continent n'ont pas tardé à l'abandonner pour celle de l'Analyse pure; ils ont complété les équations générales du mouvement par des termes exprimant les attractions planétaires, puis ils ont procédé directement à l'intégration de ces équations au moyen de développements en série poussés jusqu'aux termes qui cessent d'être appréciables aux observations. Nous devons nous borner ici à poser ces équations et à indiquer quelques-uns des résultats de ces immenses recherches dont l'ensemble constitue la Mécanique céleste.

Équations différentielles du mouvement troublé.

Désignons par m, r, x, y, z la masse, le rayon vecteur et les coordonnées de la planète étudiée; par m', r', x', y', z' les mêmes données pour la planète perturbatrice; par δ' leur distance mutuelle. Nous n'avons à tenir compte que de la différence des accélérations imprimées par m' à S et à m, lorsqu'on les a décomposées suivant les trois axes.

La première est $\frac{fm'}{r'^2}$ et sa composante suivant l'axe des x est $\frac{fm'}{r'^2}\frac{x'}{r'}$. La deuxième est $\frac{fm'}{\delta'^2}$, dont la composante analogue sera $\frac{fm'}{\delta'^2}\frac{x'-x}{\delta'}$. On aurait de même les composantes suivant les deux autres axes. Introduisons les différences de ces forces dans les équations différentielles du mouvement, en prenant pour unité de masse celle du Soleil :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(1+m)x}{r^3} + \frac{fm'(x'-x)}{\delta'^3} - \frac{fm'x'}{r'^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{f(1+m)y}{r^3} + \frac{fm'(y'-y)}{\delta'^3} - \frac{fm'y'}{r'^3},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{f(1+m)z}{r^3} + \frac{fm'(z'-z)}{\delta'^3} - \frac{fm'z'}{r'^3}.$$

Les trois couples de termes complémentaires peuvent être exprimés simplement par les dérivées partielles d'une même fonction de ces forces, prises par rapport à x, y et z. Cette fonction P, dite fonction perturbatrice, est évidemment

$$P = \frac{fm'}{\delta'} - \frac{fm'(x'x + y'y + z'z)}{r'^3};$$

car la dérivée de P par rapport à x, par exemple, est

$$-\frac{fm'}{\delta'^2}\frac{d\delta'}{dx} - \frac{fm'x'}{r'^3},$$

et, comme

$$\delta'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

on a

$$\frac{d\delta'}{dx} = -\frac{x' - x}{\delta'}.$$

La symétrie de la fonction P permet même de l'étendre à l'action perturbatrice de plusieurs planètes à la fois, m', m'', ... en écrivant

$$P = \sum \frac{fm'}{\delta'} - \sum \frac{fm'(x'x + y'y + z'z)}{r'^3}.$$

Dès lors, les équations différentielles prennent la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(1+m)x}{r^3} + \frac{dP}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{f(1+m)y}{r^3} + \frac{dP}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{f(1+m)z}{r^3} + \frac{dP}{dz}.$$

Ces équations, qui ne sont pas intégrables en termes finis comme les précédentes, ne répondent plus, en toute rigueur, à une orbite elliptique ni même à une courbe fermée; mais, par une fiction à laquelle se prête l'analyse à cause de la petitesse des perturbations, on peut les considérer comme représentant le mouvement d'un corps dans une ellipse légèrement variable de forme et de position. Pour nous contenter d'un simple à peu près, appliquons ici les procédés d'intégration dont nous avons fait usage : on

aura, par exemple, pour les aires

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = x\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dx},$$

et, en représentant fictivement le second membre par $\frac{dc}{dt}$, on aurait, en intégrant,

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt\ldots$$

La combinaison des trois intégrales premières de ce genre donnerait, pour l'une des intégrales définitives,

$$cz + c'x + c''y = 0,$$

de même forme que celle du mouvement elliptique et représentant encore un plan, mais un plan incessamment variable avec les quantités c, c', c'', qui ne sont plus ici des constantes. De même, en poursuivant cette marche, on obtiendrait pour la trajectoire une ellipse, mais une ellipse variable de forme et de position avec le temps.

L'intégration effective fournit deux sortes de termes profondément distincts : les uns contenant le temps explicitement à ses diverses puissances, les autres ne le contenant que sous les signes sinus ou cosinus. Les premiers sont les variations séculaires des éléments ; les autres sont des inégalités purement périodiques dont les effets ne s'accumulent pas, et qui repassent par les mêmes valeurs, tantôt positives, tantôt négatives, au bout de périodes plus ou moins courtes.

Un fait capital est que les grands axes ne présentent que des inégalités de seconde espèce, c'est-à-dire périodiques : leurs expressions ne contiennent aucun terme proportionnel au temps. C'est ce qui explique l'invariabilité des durées *moyennes* des révolutions planétaires que nous avons signalée plus haut comme un résultat de plus de 2000 ans d'observation.

Influence d'un milieu résistant.

Si pourtant l'espace céleste était occupé par un milieu résistant (¹), sa résistance, proportionnelle au carré de la vitesse.

(¹) Il faudrait qu'il échappât à la loi générale de l'attraction newtonienne, au-

serait exprimée par $Q\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, Q étant une constante relative à la figure et à la densité du mobile. Sa composante suivant l'axe des x serait $Q\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dx}{ds}$ ou $Q\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}$, et la première, par exemple, de ces équations deviendrait

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(1+m)x}{r^3} + \frac{dP}{dx} - Q\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}.$$

L'intégration donnerait alors des termes séculaires pour les grands axes ; ceux-ci diminueraient progressivement, et les révolutions iraient en s'accélérant par l'effet de la résistance du milieu. Le terme final de ces variations serait la réunion de toutes les planètes au Soleil et, par suite, la destruction du système.

La stabilité du système solaire repose sur l'invariabilité des grands axes ou des révolutions sidérales. Comme celle-ci existe en fait, il faut en conclure qu'il n'y a pas de milieu résistant, ou que, si les physiciens ont besoin d'un éther universel pour expliquer les phénomènes de la lumière, cet éther est trop rare pour exercer, même en 2000 ans, une action appréciable sur un système aussi sensible à l'action des moindres forces que l'est le système solaire. Les astronomes suppriment donc ce dernier terme quand il s'agit des mouvements célestes. Il faudrait au contraire le conserver pour avoir les équations du mouvement de nos projectiles dans l'air, et supprimer les termes $\frac{dP}{dx}, \ldots$, parce que les actions mutuelles de ces projectiles ou celles des corps voisins ne sauraient entrer en ligne de compte.

Variations séculaires des éléments.

Nous nous bornerons à réunir ici dans un même Tableau les variations séculaires des éléments des orbites des planètes à partir de 1750 : elles ont été déduites de la théorie et sont ainsi mieux déterminées qu'elles ne le seraient par les observations.

---

trement ses diverses parties circuleraient isolément, comme les planètes, autour du Soleil, et ne constitueraient pas un milieu proprement dit : de là la notion d'un éther impondérable.

	Grands axes	Excentricités.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud	Inclinaison sur l'écliptique de 1750
Mercure.....	0	+0,0000199	— 9'.28"	+12"	+6"
Vénus.......	0	—0,0000540	— 1.17	—28	— 4
La Terre....	0	—0,0000424	— 19. 1	— 9	—48
Mars........	0	+0,0000350	—26.40	—73	— 2
Jupiter......	0	—0,0001316	—10.45	—22	—20
Saturne.....	0	—0,0002422	—27.58	—31	— 9
Uranus.....	0	—0,0000269	— 4.49	—52	— 3
Neptune.....	0	+0,0000056	— 1.18	—17	— 34

Pour éviter toute méprise, il faut aller un peu plus avant dans cette question. On est fondé à représenter l'excentricité de Jupiter, par exemple, par 0,0483835 — 0.0001316 (τ), τ représentant des siècles, mais c'est à la condition de ne pas pousser trop loin l'emploi de cette formule dans le passé et dans l'avenir. Elle ne s'appliquerait plus en dehors de la période historique. S'il s'agissait des périodes géologiques, où l'on compte par millions d'années, ces formules assigneraient aux excentricités des variations telles que les orbites des planètes s'enchevêtreraient les unes dans les autres. Ce serait un inconvénient analogue à celui dont les Anciens se préoccupaient tant lorsqu'ils choisissaient, pour l'éviter, certaines combinaisons d'épicycles et de déférents qui nous paraissent aujourd'hui singulières. La stabilité du système solaire serait compromise. Mais, lorsqu'on envisage de telles durées, où l'histoire de notre globe nous montre si clairement que les conditions astronomiques de la vie (excentricités et inclinaisons des orbites) étaient à peu près les mêmes qu'aujourd'hui, il faut pousser beaucoup plus loin les développements de l'Analyse. Lagrange a montré que ces variations séculaires de l'excentricité et de l'inclinaison ne sont pas indéfiniment progressives; elles ont un caractère oscillatoire et restent enfermées, dans la suite des millions d'années, entre des limites assez étroites. Laplace a fait voir que les sommes suivantes

$$m\sqrt{a}e^2 + m'\sqrt{a'}e'^2 + m''\sqrt{a''}e''^2 + \ldots$$

et

$$m\sqrt{a}\tan^2 i + m'\sqrt{a'}\tan^2 i' + m''\sqrt{a''}\tan^2 i'' + \ldots$$

resteront toujours constantes tant que le système solaire ne sera soumis qu'aux forces intérieures qui résultent des attractions mutuelles des corps qui le composent. Or ces sommes sont actuelle-

ment très petites : elles l'ont donc été et le resteront toujours. Cela tient aux conditions que nous avons signalées dans l'Introduction du Ier Volume : 1° l'isolement du système solaire au sein de l'univers; 2° les orbites des planètes sont à peu près circulaires, très peu inclinées l'une sur l'autre, très éloignées les unes des autres et, circonstance essentielle, 3° les mouvements s'y opèrent dans le même sens. Nous pouvons même préciser davantage et assigner les limites entre lesquelles l'excentricité de l'orbite terrestre restera toujours comprise, ainsi que les limites analogues de l'obliquité de l'écliptique. Ces nombres-là ne doivent pas être perdus de vue par les géologues qui cherchent, dans les conditions astronomiques de notre globe, l'explication des phases géologiques qu'il a traversées (Chap. XXVII).

Inégalités périodiques.

La théorie permet d'en calculer les moindres termes. Pour en donner une idée, nous consignons ici les principales inégalités de la Terre, dues à l'action de la Lune, de Vénus et de Jupiter. Lorsqu'il s'agit d'obtenir la position de la Terre pour une date donnée, on calcule à l'aide des Tables les coordonnées elliptiques $\mathcal{L}$ et r pour cette date, en tenant compte, bien entendu, des variations séculaires qui affectent les éléments. Puis on forme les arguments suivants : longitude de la Lune — longitude du Soleil; longitude moyenne de la Terre — longitude moyenne de Vénus, c'est-à-dire $\mathcal{L}_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t$; longitude moyenne de la Terre — longitude moyenne de Jupiter, etc.; on prend ensuite dans les Tables la valeur correspondante des termes suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Équat. lun...} & +6'',5 \sin (☾ - \odot) \\ \begin{array}{r}\text{Inégalités pro-}\\ \text{duites par Vénus.}\end{array} & \left.\left\{\begin{array}{l} +5,0 \sin (\mathcal{L}'_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -5,7 \sin 2(\mathcal{L}'_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -0,7 \sin 3(\mathcal{L}'_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -3,5 \sin [3(\mathcal{L}'_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t) - \varpi'] \end{array}\right\}\right.(1+\mu'') \\ \begin{array}{r}\text{Inégalités pro-}\\ \text{duites par Jupi-}\\ \text{ter.............}\end{array} & \left.\left\{\begin{array}{l} +7'',1 \sin (\mathcal{L}^{\text{iv}}_0 + n^{\text{iv}}t - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -2,7 \sin 2(\mathcal{L}^{\text{iv}}_0 + n^{\text{iv}}t - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -0,1 \sin 3(\mathcal{L}^{\text{iv}}_0 + n^{\text{iv}}t - \mathcal{L}''_0 - n''t) \\ -2,0 \sin (\mathcal{L}^{\text{iv}}_0 + n^{\text{iv}}t - \varpi'') \end{array}\right\}\right.(1+\mu^{\text{v}}) \\ & \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et on en ajoute la somme à la longitude elliptique. De même, au rayon vecteur elliptique R, on ajoute les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&0,0000263 \cos 2(\mathcal{L}'_0 + n't - \mathcal{L}''_0 - n''t)(1 - \mu') \\
&+ 0,0000161 \cos (\mathcal{L}^{\text{IV}}_0 + n^{\text{IV}}t - \mathcal{L}''_0 - n''t)(1 - \mu^{\text{IV}}) + \ldots,
\end{aligned}
$$

formules dans lesquelles μ'' et μ^{v} désignent de petites corrections dont les masses adoptées pour Vénus et Jupiter pourraient avoir besoin.

Ces mêmes termes nous montrent comment on parvient à déterminer les masses des planètes Mercure et Vénus, qui n'ont pas de satellites. L'argument de la première inégalité due à Vénus indique que la période de cette inégalité est la révolution synodique de Vénus, c'est-à-dire de 584 jours; il suffit donc de déterminer la position de la Terre (ou du Soleil) pendant cette période pour suivre complètement la marche de cette inégalité, qui passera, à 292 jours d'intervalle, de $-5'',0$ à $+5'',0$. Si les observations montrent que ce coefficient $5''$ doit être un peu augmenté ou diminué, on en conclura la valeur de la petite correction μ' qui devra être appliquée à la masse supposée de Vénus. Mais c'est surtout dans les inégalités séculaires de l'obliquité de l'écliptique, du périhélie, etc., de l'orbite terrestre que se révèle le mieux l'influence d'une erreur sur la masse de Vénus, et c'est par elles qu'on en détermine le plus exactement la valeur, parce qu'ici les effets de cette petite force (l'attraction de Vénus sur la Terre) vont en s'accumulant de siècle en siècle.

Quant à l'inégalité lunaire, dont la période est d'un mois, nous la déterminerons plus loin. C'est la seule qui puisse être traitée à part dans cet Ouvrage; elle nous fera connaître la masse de l'astre perturbateur, la Lune.

CHAPITRE XIII.

CARACTÈRES DE L'ATTRACTION NEWTONIENNE.

La loi de l'attraction n'est pas susceptible de modification.

Nous avons vu que cette force agit sur toutes les particules du corps attiré, qu'elle est proportionnelle à la masse du corps attirant, et que son intensité varie en raison inverse du carré des distances. La démonstration de cette dernière loi est fondée sur la supposition du mouvement elliptique des planètes. Mais, en toute rigueur, les planètes ne se meuvent pas dans des ellipses fixes et fermées; on pouvait donc, dans les premiers temps, et avant que les observations fussent venues, comme aujourd'hui, confirmer les déductions les plus éloignées, les plus délicates de la théorie de l'attraction, se demander si la forme $\frac{\mu}{r^2}$ est bien l'expression exacte d'une loi de la nature. L'exposant 2 ne serait-il pas une simple approximation? Newton se posa à lui-même l'objection et y fit une réponse péremptoire. Dans les orbites planétaires l'observation constate que le rayon vecteur le plus long suit, à 180° de distance angulaire, le rayon vecteur le plus court, ou du moins à 180° plus un très petit nombre de secondes (4 ou 5 pour la Terre). C'est le phénomène de la variation de la longitude du périhélie. Eh bien, Newton démontra que, si l'on voulait augmenter de $\frac{1}{60}$ seulement l'exposant 2 du dénominateur de $\frac{\mu}{r^2}$, il en résulterait que l'aphélie de la Terre, au lieu d'être sensiblement opposé au périhélie, dans la même révolution, serait plus avancé en longitude d'au moins 181°,30. En d'autres termes, le mouvement du périhélie serait de plus de 3° à chaque révolution; cela ferait 300° par siècle, tandis que cette variation n'est, d'après les observations, que de 19'.

Il y a plus. Newton ayant calculé la part qui doit, dans cet imperceptible mouvement des périhélies, être attribuée aux attractions planétaires, trouva à très peu près ce chiffre de 19', en sorte qu'il ne reste rien, dans ce phénomène délicat, qui fasse soupçonner une erreur, si petite qu'on le voudra, dans la loi assignée à l'attraction.

Les géomètres ont rencontré plus d'un mécompte et n'ont pas toujours réussi du premier coup à rattacher, à cette loi, certains détails délicats du mouvement des corps célestes. Ils ont été plus d'une fois tentés d'attribuer leurs insuccès à la loi elle-même, et cherché en conséquence à la modifier par de petits termes additionnels; mais ils ont toujours fini par reconnaître que le mécompte tenait à l'imperfection de leur analyse. En la rectifiant ou en poussant plus loin leurs développements, ils arrivaient au but sans avoir rien à changer à la loi $\frac{\mu}{r^2}$. C'est ainsi que Newton lui-même ne put trouver dans ses calculs, pour le périgée de l'orbite lunaire, que la moitié du mouvement observé. Mais Clairaut réussit, par une analyse plus complète, à lever la difficulté, en montrant que le terme auquel s'était arrêté Newton n'était que le commencement d'une série dont les termes négligés doublaient la valeur du premier.

De même, lorsque les géomètres eurent prouvé l'invariabilité des moyens mouvements, ils se trouvèrent en face d'un phénomène qui semblait en contradiction absolue avec cette conclusion : nous voulons parler de la grande inégalité de Saturne et de Jupiter. Les observations des Grecs et des Arabes, comparées à celles du XVIe siècle, avaient établi que le mouvement de la première planète allait peu à peu en s'accélérant, tandis que celui de la seconde présentait l'effet contraire. Lagrange lui-même échoua dans ses efforts pour lever cette contradiction frappante. On accusait déjà la loi de l'attraction lorsque Laplace découvrit la cause, si longtemps cherchée, dans ce fait que les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, tout incommensurables qu'ils soient en réalité, approchent néanmoins d'une commensurabilité grossière, en ce sens que deux révolutions de Saturne en valent cinq de Jupiter à 142 jours près, c'est-à-dire à $\frac{1}{30}$ près de la dernière. Il résulte effectivement de cette circonstance singulière une inégalité à longue période, procédant suivant le sinus de cinq fois la longitude

moyenne de Jupiter moins deux fois celle de Saturne, qu'on n'aurait certes pas soupçonnée dans les mouvements des deux planètes. L'introduction de cette inégalité mit d'accord les observations des Anciens et celles des Modernes.

L'attraction est indépendante de l'état physique ou chimique des corps.

L'attraction est indépendante de l'état physique ou chimique des corps. Ainsi la masse incandescente et presque entièrement fluide du Soleil et les masses relativement froides et denses des planètes présentent à cet égard les plus grandes différences, et cependant rien, dans les phénomènes astronomiques les plus délicats, n'indique que leurs attractions mutuelles soient réglées par autre chose que leur quantité de matière.

La propagation de l'attraction est instantanée.

Elle ne se propage pas successivement dans l'espace comme la lumière ou la chaleur, mais instantanément. Laplace a démontré que, si l'attraction a une vitesse, celle-ci est au moins cent millions de fois plus grande que celle de la lumière.

L'attraction des corps célestes est identique avec la pesanteur.

Voilà donc une force que tous les corps du système solaire exercent à toute distance dans l'espace céleste, et qui ne ressemble à aucune de celles que nous mettons en jeu, sauf la pesanteur à laquelle nous l'avons déjà comparée. Celle-ci, en effet, agit sur tous les corps, molécule à molécule; le poids qu'elle leur communique ne dépend que de leur masse; la vitesse de chute qu'elle leur imprime, du moins dans le vide, en est absolument indépendante. Elle n'est interceptée par aucun écran; elle règne à l'intérieur de la Terre aussi loin que nous y ayons pénétré, et à l'extérieur aussi haut que nous nous soyons élevés, sans qu'on ait pu, il est vrai, s'écarter assez du centre de la Terre pour y remarquer une variation dépendante de la distance. A la vérité, ce n'est pas un phénomène entièrement simple, à cause de la rotation diurne de notre globe, mais il est aisé d'en défalquer, comme nous l'avons fait au Chapitre XXIII

du Tome Ier, la composante verticale de la force centrifuge.

Comparons donc ces deux forces. Il suffirait pour cela de ramener l'attraction de la Terre $\frac{4\pi^2 K}{328000}$ à la distance (ρ) du centre, (ρ) désignant le rayon, et d'y introduire les unités courantes, le mètre et la seconde, au lieu de la distance du Soleil à la Terre et du jour moyen. Mais comme cette attraction a été déduite des mouvements de la Lune, il sera mieux de reprendre entièrement le calcul, comme Newton l'a fait, avec toute l'exactitude que l'on y peut mettre aujourd'hui. Soient m, m' les masses des deux astres, d leur distance, T la durée de la révolution sidérale de la Lune ; on aura

$$f(m + m') = \frac{4\pi^2 d^3}{T^2}.$$

Si d est exprimé en rayons terrestres (ρ) (à l'équateur), l'attraction ainsi calculée sera relative à la distance (ρ) et exprimée en parties de cette unité. Pour l'avoir en mètres, il suffira de multiplier le résultat par la valeur de (ρ) en mètres, c'est-à-dire par 6378393^{m}. Nous verrons plus loin que la mesure directe de d (distance de la Lune) a donné $d = 60{,}264(\rho) = \frac{d}{14000}$ et que $T = 27^{j},32166 \times 86400^{s}$. D'ailleurs, l'action perturbatrice du Soleil a pour effet de réduire de $\frac{1}{357}$ l'effet de l'attraction de la Terre sur la Lune ; enfin nous verrons que $m' = \frac{m}{80{,}72}$. Il faudra donc multiplier le second membre par $1 + \frac{1}{357}$ et le diviser par $1 + \frac{1}{80{,}72}$. Voici le calcul de l'attraction de la Terre ramenée à la distance (ρ) de son centre :

log 27,32166....	1,43651	log $4\pi^2$......	1,59636
log 86400.......	4,93651	log $\overline{60{,}264}^3$...	5,34018
log T..........	6,37302	C' log T².....	7,25396 — 10
log T².........	12,74604	log $\frac{80{,}72}{81{,}72}$...	9,99465 — 10
		log $\frac{358}{357}$.....	0,00121
		log (ρ).......	6,80471
			0,99107

Ainsi l'attraction céleste de la Terre à sa surface est..	9,7965
L'intensité G de la pesanteur (t. I, p. 332)..........	9,7981
Différence......	0,0016

L'écart est au-dessous de l'erreur à craindre par suite de l'incertitude de d, c'est-à-dire de $\pm 3.\frac{9^{m},7965}{14000} = 0^{m},002$.

Il y a donc identité complète entre l'attraction des corps célestes, telle que celle de la Terre sur la Lune, et la pesanteur. Cette attraction n'est pas une force fictive, imaginée par les astronomes pour rendre compte de leurs observations : c'est une réalité que nous retrouvons autour de nous dans les phénomènes familiers du poids des corps et de leur chute.

Les vérifications ne manqueront pas. Nous conclurons, par exemple, que les corps terrestres doivent s'attirer les uns les autres, chose qu'on n'eût jamais soupçonnée auparavant. Soit une petite sphère de rayon r et de densité δ. Son attraction sera, à la surface,

$$\frac{f\frac{4}{3}\pi r^3\delta}{r^2} = f\tfrac{4}{3}\pi\delta r.$$

Si elle est de même densité que la Terre, on voit que son attraction sera à celle de notre globe, sur un point de la surface, dans le rapport de leurs rayons. Si elle a 1^{m} de rayon, par exemple, son attraction sur un corps placé à la surface sera 6378393 fois moindre que celle de la Terre. Les balances ordinaires ne seraient pas capables de mettre en évidence des actions si faibles; mais on est parvenu à les mesurer à l'aide de la torsion d'un long fil métallique, qu'on peut proportionner aux plus faibles forces. On a même déduit de ces belles et délicates expériences (Cavendish, Reich, Baily, Cornu) la densité du globe terrestre. Nous avons vu, en Géodésie, qu'on a mesuré aussi, par des procédés bien différents, l'attraction de certaines montagnes. Enfin l'observation du pendule au niveau de la mer et sur des plateaux très élevés a montré que la pesanteur diminue, comme l'attraction céleste, à mesure que l'on s'écarte du centre de la Terre.

Critique du mot attraction.

Cette identification nous apprend que le poids d'un corps ne dépend pas seulement de sa masse : il est relatif à la planète sur laquelle il est placé. Ce poids serait 28 fois plus grand sur le Soleil que sur la Terre, et se réduirait à bien peu de chose si le corps appartenait à une de ces planéticules qui circulent entre Mars et Jupiter. Elle nous permet de transporter à la pesanteur tous les attributs que nous avons reconnus à l'attraction newtonienne. Mais elle nous laisse dans la même ignorance sur la cause première de cette force. Il faut donc avouer que le mot commode d'*attraction* est fort mal imaginé, en ce qu'il semble mettre, dans chaque corps, un effort semblable à celui que nous faisons pour tirer un fardeau avec une corde. Mais l'essentiel est de connaître les caractères de cette force, de cette tendance qui sollicite les molécules de matière les unes vers les autres à toute distance ; ils figurent seuls dans nos équations. Savoir que cette force céleste, dont nous ne connaissons que les effets, n'est autre que la pesanteur familière, c'est s'expliquer l'une par l'autre autant que ces choses-là peuvent être comprises.

Aujourd'hui ces considérations paraissent bien simples. Il ne faudrait pas croire qu'elles le fussent aux débuts de la science nouvelle. Lorsque Newton essaya pour la première fois, en 1665, de comparer l'attraction céleste de la Terre à la pesanteur, par un calcul identique à celui qu'on vient de voir, il employa une fausse valeur du rayon de la Terre qu'il déduisit de l'évaluation en usage, de son temps, chez les géographes et les marins de son pays. On croyait en Angleterre que le *mile*, de 1760 yards ou de 1609^m, valait $1'$ terrestre ou la soixantième partie du degré. Dès lors

$$(\rho) = 1609^m \times 3438,$$

puisque l'arc de $1'$ est contenu 3438 fois dans le rayon. Or la minute de grand cercle sur la Terre est de 1852^m et non de 1609^m. L'erreur était de près de $\frac{1}{6}$. Au lieu de $9^m,80$ Newton trouva pour l'attraction de la Terre, par le calcul précédent, $8^m,46$. Il crut dès lors que, dans la pesanteur G, il y avait autre chose encore que

l'attraction des astres, et abandonna son idée pendant seize années. Si l'identification des deux forces eût été chose aussi naturelle qu'elle nous le paraît aujourd'hui, Newton n'aurait pas manqué de soupçonner quelque faute dans l'un de ses nombres, et il aurait bien vite appris, en recherchant les mesures antérieurement connues de Fernel et de Norwood, que c'était en effet le cas. Ce n'est que seize années plus tard qu'il entendit dire, dans une séance de la Société royale de Londres, que Picard avait trouvé 57060 toises pour la longueur de l'arc de 1°. Il reprit son ancien calcul avec cette donnée nouvelle et, obtenant enfin la vérification cherchée, il sentit qu'il était sur la voie des plus grandes découvertes.

Calcul définitif de la masse de la Terre.

Nous pouvons désormais considérer un pendule qu'on fait osciller à la surface de la Terre comme un satellite, car la durée de ses oscillations dépend de la masse de notre globe tout comme les éléments de l'orbite lunaire. On a vu (t. Ier, p. 332) que la pesanteur G, ou plutôt l'attraction de la Terre à la distance (ρ), est $9^m,7981$. On a donc

$$fm = G(\rho)^2$$

à la distance 1^m, la masse de la Terre étant réunie en son centre. D'autre part, l'orbite de la Terre autour du Soleil nous donne

$$f(M + m + m') = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

à la distance arbitrairement prise pour unité, 1^m, pourvu que a soit exprimé en mètres et T en secondes; par conséquent,

$$\frac{m}{M + m + m'} \quad \text{ou sensiblement} \quad \frac{m}{M} = \frac{GT^2(\rho)^2}{4\pi^2 a^3} = \frac{GT^2}{4\pi^2(\rho)} \frac{(\rho)^3}{a^3}.$$

Or $\frac{(\rho)}{a} = \sin\pi'$, π' étant la parallaxe du Soleil dont la valeur est $8'',813$. Voici le calcul :

log G	0,99114
log T^2	14,99822
C^t log $4\pi^2$	8,40364—10
C^t log (ρ)	3,19530—10
log $\sin^2 \pi'$	6,89210—20
log $\frac{m}{M}$	4,48040—10
log dénom................	5,51960

Ainsi la masse de la Terre est $\frac{1}{330800}$, avec une incertitude de $\frac{3}{1500}$, due à celle de la parallaxe du Soleil, qui est de $\pm \frac{1}{1500}$ de sa valeur (1).

Les astronomes donnent souvent, sous le nom de *masse de la Terre*, la somme des masses du couple Terre-Lune. On aura $m + m'$ ou $m\left(1 + \frac{1}{80,72}\right)$ en multipliant le résultat précédent par $\frac{81,72}{80,72}$; on trouve ainsi $m + m' = \frac{1}{326800}$.

(1) *L'Annuaire du Bureau des Longitudes* donne $\frac{1}{324400}$; la différence tient à celle des éléments de ce calcul, tel que la parallaxe du Soleil. Quant au résultat provisoire de la p. 98, le calcul détaillé de la p. 138 montre qu'il doit être augmenté de $\frac{1}{337}$ de sa valeur. On retrouve alors, à très peu près, le résultat ci-dessus, non pour m, mais pour $m + m'$.

CHAPITRE XIV.

PESANTEUR A LA SURFACE DES ASTRES; ORIGINE DE LEUR CHALEUR ET DE LEUR LUMIÈRE.

Pesanteur à la surface du Soleil et des planètes.

L'attraction du Soleil à la distance 1^m, sa masse étant réunie en son centre, est $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, a étant exprimé en mètres et T en secondes. On aura l'attraction à la distance du rayon $\mathfrak{r}$, c'est-à-dire à la surface, par

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 \mathfrak{r}^2}.$$

Le rayon $\mathfrak{r}$ du Soleil s'obtient, en mètres, en divisant membre à membre

$$\frac{\mathfrak{r}}{a} = \sin 16', \quad \frac{(\rho)}{a} = \sin 8'',813, \text{ ce qui donne } \mathfrak{r} = 108,935\,(\rho),$$

et en faisant $(\rho) = 6378393^m$. Le calcul donne $273^m,2$. Ainsi la pesanteur, qui devrait être 108,93 fois celle de la Terre si le Soleil avait même densité moyenne que notre globe, n'est que 28 fois plus grande. Sa densité moyenne n'est donc que le quart de la nôtre, ou de 1,4 par rapport à l'eau.

On calculerait de même la pesanteur à la surface d'une planète dont la masse et les dimensions sont connues. (Voir *Table des éléments du système solaire,* à la fin de ce Volume).

Limites de l'aplatissement.

La rotation étant donnée, il est aisé d'en conclure la force centrifuge à l'équateur et son rapport à la pesanteur équatoriale G.

Ce rapport, qu'on désigne par la lettre q, a pour expression

$$q = \frac{4\pi^2(\rho)}{T^2 G},$$

T étant la durée de la rotation en secondes. Clairaut a montré que, pour un sphéroïde, l'aplatissement est compris entre $\frac{5}{4}q$ et $\frac{1}{2}q$, la première valeur ayant lieu si la densité des couches croît à l'infini vers le centre, c'est-à-dire si la masse y est presque toute condensée, et la seconde étant relative au cas de l'homogénéité. Voici les éléments de ce calcul pour le Soleil et quelques planètes :

	Rayon en parties de (ρ).	Rotation. j h m s	Pesanteur en parties de G.
Soleil.........	108,935	25. 4.29	28
Mars.........	0,535	1. 0.37.23	0,38
Jupiter.......	11,065	9.55.37	2,25
Saturne.......	9,305	10.14.24	0,89

Rappelons que $(\rho) = 6378393^{m}$ et $G = 9^{m},7981$.

La formule précédente donne :

	Valeurs de q.	Limites de l'aplatissement.			Aplatissement observé.	Densité moyenne.
Soleil.....	$\frac{1}{48000}$	$\frac{1}{38000}$	et	$\frac{1}{96000}$	insensible	1,4
La Terre..	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{230}$	et	$\frac{1}{576}$	$\frac{1}{292}$	5,6
Mars......	$\frac{1}{215}$	$\frac{1}{172}$	et	$\frac{1}{430}$	$\frac{1}{174}$?	4,0
Jupiter....	$\frac{1}{11,5}$	$\frac{1}{9}$	et	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{17}$	1,4
Saturne...	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	et	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	0,7

Ainsi la Terre et Mars, c'est-à-dire les planètes très denses, doivent avoir un accroissement de densité vers leur centre beaucoup plus rapide que Jupiter et surtout Saturne, dont les densités moyennes sont relativement faibles.

Chute des corps sur le Soleil.

On vient de voir qu'un corps, en tombant d'une très petite hauteur à la surface du Soleil, acquiert, dans la première seconde de sa chute, une vitesse de $273^{m},2$, à peu près celle d'une balle de fusil.

Si le corps part d'une distance quelconque z, comptée à partir

du centre du Soleil, en sorte qu'il faille tenir compte de la variation de la pesanteur avec la distance, l'équation différentielle sera, en désignant par G′ la pesanteur solaire à la distance r du centre,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{G' r^2}{z^2}.$$

Intégrons après avoir multiplié par $2\frac{dz}{dt}$, il vient

$$V^2 = \frac{2 G' r^2}{z} + h.$$

Supposons la vitesse initiale nulle et la distance initiale si grande que la constante h puisse être négligée : on aura pour $z = r$

$$V = \sqrt{2 G' r},$$

r étant toujours exprimé en mètres. Le calcul donne $V = 616000^{m}$ ou 154 lieues par seconde. La force vive $\frac{1}{2} m V^2$ d'un corps de masse m tombant de l'infini sur le Soleil est facile à évaluer. Supposons-le de 1^{kg} sur la Terre : sa masse sera $\frac{1^{kg}}{G} = \frac{1}{9,8}$. On trouve ainsi, pour la force vive absorbée dans le choc, 18700000000^{kgm}.

La destruction de cette force vive engendrera, à raison de 1^{cal} pour 425^{km}, ... 44 millions de calories.

Origine de la chaleur et de la lumière du Soleil.

Si donc le Soleil a été formé par la concentration d'une quantité de matériaux primitivement disséminés sur un grand espace, et tombant peu à peu vers un centre d'attraction quelconque, sa formation aura dû être accompagnée d'un énorme développement de chaleur. Les astres ainsi formés (le Soleil, les étoiles) restent encore incandescents malgré leur radiation incessante, qui dure depuis l'époque de leur formation, tandis que les corps à masse relativement très faible, la Terre, les planètes, sont déjà éteints, au moins à la surface.

Cette conception répond à l'un des plus grands problèmes de la nature, problème dont les Anciens se sont préoccupés et que les

Modernes ont tout bonnement écarté [1] : Pourquoi le Soleil et les étoiles brillent-ils au ciel? D'où viennent cet éclat, cette chaleur, cette perpétuelle et constante incandescence? La solution ne pouvait venir que de la Thermodynamique ; elle est due au créateur de cette science nouvelle, le médecin R. Mayer. Mais il ne faudrait pas croire, avec cet auteur et quelques autres, que l'énorme radiation solaire soit entretenue par une chute incessante de matériaux cosmiques sur le Soleil. On a calculé, il est vrai, qu'à raison de 44 millions de calories par kilogramme de matière il suffirait qu'il tombât, par heure, un de ces kilogrammes sur chaque mètre carré de la surface du Soleil, ce qui de prime abord n'a rien de choquant. Mais, à ce compte, la masse du Soleil s'accroîtrait chaque année de $\frac{1}{20000000}$, et il en résulterait une accélération constante du mouvement des planètes qui ne serait nullement insensible. Si la masse M_0 du Soleil, à l'origine du temps t, devient au bout de t années $M_0(1+qt)$, il en sera de même pour $\mu_0 = fM_0$ qui deviendra aussi $\mu_0(1+qt)$. Les aires décrites par les rayons vecteurs des planètes resteront invariables, et on aura par conséquent

$$\sqrt{\mu_0 a_0(1-e_0^2)} = \sqrt{\mu a(1-e^2)},$$

ou $\mu a = \mu_0 a_0$, en négligeant le carré de l'excentricité, qui reste toujours petite (p. 132). Par conséquent

$$a = \frac{a_0}{1+qt};$$

mais, d'autre part, $a^3 n^2 = \mu = \mu_0(1+qt) = a_0^3 n_0^2(1+qt)$; donc

$$n = n_0(1+qt)^2 = n_0 + 2qn_0 t,$$

en négligeant le carré de q.

La longitude moyenne $\int n\,dt$ devient

$$L_0 + n_0 t + n_0 q t^2;$$

elle sera donc affectée de l'inégalité séculaire $+n_0 q$. Voyons si cela est confirmé par les observations. En prenant l'année pour unité,

---

[1] Sauf Newton, qui s'en préoccupa un instant.

ce qui répond à $n_0 = 360°$, avec $q = \frac{1}{200000000}$, l'altération de la longitude moyenne au bout de 2000 ans serait

$$360° \times \frac{1}{200000000} \times \overline{2000}^2 = 72°.$$

Or, en comparant les observations d'Hipparque avec celles des Modernes, on représente les premières à 20′ près sans employer de terme séculaire. Il y a loin, comme on le voit, de ce petit écart de 20′, parfaitement explicable par le degré d'exactitude des Anciens, à un écart de 72° que nous devrions trouver si l'hypothèse dont nous nous occupons était fondée. Ainsi le Soleil n'est pas alimenté par la chute continuelle de matériaux cosmiques sur sa surface ; la chaleur énorme qu'il perd par radiation dans l'espace, et qui équivaut au travail de 78 000 chevaux-vapeur par mètre carré de surface (¹), est de la chaleur d'origine, dont une partie seulement est restituée par celle qui naît de la lente contraction progressive de la masse solaire.

Quant à la constance séculaire de cette radiation, elle tient sans aucun doute aux échanges continuels qui s'opèrent verticalement dans le globe solaire entre la superficie et la région centrale. Il en résulte que la masse entière participe au refroidissement, car les produits solides incandescents qui se forment à la surface et constituent la photosphère retombent dans les couches internes en vertu de leur excès de densité, s'y transforment en vapeurs par voie de volatilisation ou de dissociation, et déterminent l'ascension de courants gazeux qui viennent à leur tour renouveler la photosphère, en sorte que la surface se maintiendra dans le même état physique tant que ces mouvements intestins pourront s'opérer librement.

Origine de la chaleur centrale de la Terre.

Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, un corps lancé horizontalement à la surface de la Terre, avec une vitesse suffisante,

(¹) D'après Pouillet, la chaleur versée par le Soleil sur 1^{mq}, à la distance de la Terre, serait de $0^{cal},3$ par seconde. La radiation superficielle de cet astre serait donc de $0^{cal},3 \times \overline{215}^2 = 13800^{cal}$ par seconde et par mètre carré, énergie équivalente à $13800 \times \frac{425}{75} = 78000$ chevaux-vapeur. D'après MM. Violle et Crova, il faudrait augmenter ces nombres d'un quart.

décrira une orbite circulaire de rayon (ρ) dans un temps T donné par la relation

$$\frac{4\pi^2(\rho)^3}{T^2} = G(\rho)^2.$$

On en tire $T = 2\pi\sqrt{\frac{(\rho)}{G}}$. C'est la durée de l'oscillation double d'un pendule de rayon (ρ). On trouve $T = 1^h 23^m 40^s$. La vitesse dans ce cercle serait $\sqrt{\frac{G(\rho)^2}{(\rho)}} = \sqrt{G(\rho)} = 7905^m$ par seconde; elle est seize fois plus grande que celle d'un boulet de canon au sortir de la pièce. Sur la plupart des planéticules qui circulent entre Mars et Jupiter, une pierre lancée à la main deviendrait un satellite.

Un corps tombant de l'infini (une distance extrêmement grande) sur la Terre, sans vitesse initiale, la frapperait avec une vitesse de $7905^m\sqrt{2} = 11000^m$ par seconde. La chaleur engendrée par le choc d'un kilogramme de matière dans ces conditions serait de 14000^{cal}. Si donc la Terre a été formée, comme les autres astres, par l'agglomération successive de matériaux venus de très loin, cette formation a dû être accompagnée d'une très grande chaleur. La Terre a sans doute été entièrement fluide à une époque reculée; elle a pu prendre ainsi la figure qui convenait à l'équilibre des forces intérieures. Le refroidissement a été bien plus rapide que pour le Soleil, dont la masse et la chaleur d'origine sont incomparablement plus grandes, et, lorsque la viscosité progressive des couches a gêné les mouvements intérieurs, il a dû se former une croûte solide dont l'épaisseur, très lentement croissante, protège aujourd'hui les régions centrales contre le refroidissement. Là est la justification de l'hypothèse de la fluidité primitive du globe, qui a servi de base aux travaux de Newton et de ses successeurs sur la figure de la Terre, et de celle de la chaleur centrale, qui joue un si grand rôle en Géologie.

Étoiles filantes et aérolithes.

La Terre rencontre continuellement, dans son mouvement annuel, des corpuscules qui circulent eux-mêmes, isolément ou par essaims, autour du Soleil, avec des vitesses presque paraboliques, dont le maximum s'élève à $7^l,4\sqrt{2} = 10$ lieues par seconde

(celle de la Terre est de $7^{\mathrm{l}},4$). Le choc aura donc lieu, en certains cas, avec une vitesse relative de 17 lieues. Ces corpuscules, en pénétrant dans l'atmosphère avec cette grande vitesse, y rencontrent une résistance qui détruit leur force vive. Il en résulte une rapide production de chaleur, une vive incandescence. Telle est l'explication du phénomène des étoiles filantes qui brillent un instant et s'éteignent en se dissipant avant d'avoir atteint le sol. Les météorites pierreuses ou ferrugineuses nous arrivent pareillement des espaces célestes, mais avec des vitesses moins grandes d'ordinaire : leur incandescence est moins prononcée; ils parviennent jusqu'au sol et s'y enfoncent plus ou moins profondément.

Ces phénomènes intéressants reproduisent sous nos yeux, à très petite échelle, ce qui a dû se passer autrefois, en grand, lorsque le Soleil et les planètes se sont formés par l'agglomération de matériaux épars dans l'espace.



LIVRE IV.

CALCUL DE L'ORBITE D'UNE PLANÈTE OU D'UNE COMÈTE NOUVELLEMENT DÉCOUVERTE.

Chaque année on découvre cinq ou six petites planètes de l'essaim qui circule entre les orbites de Mars et de Jupiter, et à peu près le même nombre de comètes. Dès que l'on a réuni les observations nécessaires, on s'empresse de déterminer l'orbite de l'astre nouveau, afin de n'être pas exposé à le perdre s'il survenait une série de jours couverts, et aussi pour satisfaire une curiosité bien naturelle, car c'est là, en Astronomie, le domaine de l'imprévu, des surprises, des découvertes intéressantes. Ces calculs, qui ne sont ni bien longs, ni bien difficiles, peuvent donc être recommandés aux commençants comme une excellente occasion d'essayer leurs forces, et peut-être de faire une découverte intéressante. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème. Elles se rapportent à deux manières différentes de poser la question. Puisqu'il y a six éléments à déterminer, a, e, ϖ, i, N et θ, il faut six données que fourniront trois observations complètes, à savoir L_1 et β_1 pour la première, L'_1 et β'_1 pour la seconde, L''_1 et β''_1 pour la troisième, bien entendu avec les dates t, t', t''. La plupart des géomètres qui se sont occupés de ce beau problème ont cherché l'orbite qui satisfait exactement à trois positions observées de l'astre nouveau, en admettant que les observations ne soient pas trop éloignées les unes des autres. Une seconde manière d'envisager la question consiste à déduire très approximativement de ces trois observations géocentriques, ou mieux d'un nombre plus considérable d'observations assez rapprochées, la position héliocentrique de l'astre à un moment donné, sa vitesse et sa

direction, ce qui suffit, comme nous l'avons vu (p. 117) pour déterminer tous les éléments de l'orbite. Dans les deux cas, on ignore d'avance à quelle section conique on aboutira: on ne fait pas de supposition préalable à ce sujet.

Cette généralité est nécessaire, car si la plupart des comètes parcourent des orbites assez peu différentes d'une parabole pour qu'il soit le plus souvent permis et même nécessaire de s'en tenir à l'hypothèse parabolique, on a quelquefois affaire à une comète nettement elliptique (1), et alors il est essentiel que la méthode employée n'induise pas le calculateur en erreur à ce sujet. Nous donnerons donc deux méthodes, celle de Laplace qui résout le problème dans toute sa généralité, de la manière la plus simple et la plus élégante, et la méthode d'Olbers pour les comètes paraboliques.

---

(1) Nous ne parlons pas d'orbites hyperboliques, parce qu'on n'en a pas encore rencontré de bien caractérisées.

CHAPITRE XV.

MÉTHODE DE LAPLACE.

Les coordonnées géocentriques de l'astre nouveau étant, à la date t, L_1 et β_1, si nous désignons par r_1 sa distance inconnue à la Terre, les coordonnées héliocentriques auront pour expression

$$\begin{aligned} x &= \xi + r_1 \sin\beta_1 \cos L_1, \\ y &= \eta + r_1 \sin\beta_1 \sin L_1, \\ z &= \phantom{\eta +{}} r_1 \cos\beta_1, \end{aligned}$$

dans lesquelles les coordonnées héliocentriques de la Terre, ξ et η, s'obtiennent par

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = R\cos\odot, \\ \eta = R\sin\odot. \end{cases}$$

Pour simplifier un peu, remplaçons $r_1 \sin\beta_1$ par ρ, projection de r_1 sur l'écliptique. C'est ce que les astronomes nomment *distance accourcie*.

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi + \rho\cos L_1, \\ y = \eta + \rho\sin L_1, \\ z = \phantom{\eta +{}} \rho\cot\beta_1. \end{cases}$$

On en déduit r, rayon vecteur de l'astre,

$$(3) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2R\rho\cos(L_1 - \odot) + \frac{\sin^2\beta_1}{\rho^2}.$$

Cela posé, en différentiant une première fois les équations (2) par rapport au temps, on fait apparaître $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire les composantes de la vitesse suivant les trois axes. Seulement ces

équations contiendront ρ et sa dérivée $\frac{d\rho}{dt}$. En différentiant une seconde fois, on aura trois équations dans lesquelles on remplacera les dérivées secondes de x, y, z, ξ et η par leurs valeurs tirées des équations générales du mouvement [1] :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\xi}{R^3},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\eta}{R^3}.$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{r^3}{z}.$$

Ces trois équations finales feront connaître ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Il sera facile dès lors, en remontant aux équations (2) et à leurs dérivées, de calculer les coordonnées x, y, z et leurs vitesses, ce qui conduit à la solution du problème.

Mais ces différentiations feront apparaître les dérivées premières et deuxièmes des coordonnées observées L_1 et β_1. Il faut donc, avant tout, obtenir ces quantités à l'aide des observations géocentriques. Voici les trois phases de cette méthode : 1° calcul des dérivées $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{d^2L_1}{dt^2}$, $\frac{d\beta_1}{dt}$, $\frac{d^2\beta_1}{dt^2}$, à l'aide des observations ; 2° for-

---

(1) Pour éviter l'introduction, dans ces calculs, de facteurs aussi petits que μ et μ^2, on remplace μ par l'unité, ce qui entraîne un changement d'unité pour le temps. C'est ce qui arriverait si, dans les calculs de Mécanique terrestre, on avait besoin de remplacer g par 1, tout en conservant le mètre pour unité de longueur. Il faudrait prendre, pour exprimer le temps t, non plus la seconde, mais une autre unité θ telle que

$$e = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\theta}\right)^2,$$

ce qui entraîne $\theta = \frac{1}{\sqrt{g}}$. Ici, μ est une accélération toute pareille à g ; il faudra donc poser

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = 58,1344,$$

ou, ce qui revient au même, multiplier les intervalles de temps exprimés en jours et en fractions de jour par le facteur $\sqrt{\mu}$, dont le logarithme est $8,2355815 - 10$. Nous emploierons la notation τ à la place de t pour indiquer que la durée t, en jours, a été exprimée avec la nouvelle unité, ou multipliée par $\sqrt{\mu}$.

mation et résolution de l'équation en ρ; 3° calcul de x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, d'où l'on déduit les éléments de l'orbite.

Calculs préparatoires.

Les données de l'observation sont

Dates.	Coordonnées équatoriales.			Coordonnées écliptiques.	
t'	$Æ'$	δ'	On en conclut.....	L'_1	β'_1
t''	$Æ''$	δ''		L''_1	β''_1
t'''	$Æ'''$	δ'''		L'''_1	β'''_1
....	...	..		..	...

Prenons une date intermédiaire t et désignons par $L_1, \beta_1, \frac{dL_1}{dt}, \frac{d\beta_1}{dt}, \ldots$ les coordonnées correspondantes et leurs dérivées, par $\tau - \tau', \tau - \tau''$ les intervalles $t - t', t - t''$ multipliés par $\sqrt{\mu}$, on aura

$$L'_1 = L_1 + (\tau - \tau')\frac{dL_1}{dt} + \frac{(\tau - \tau')^2}{2}\frac{d^2L_1}{dt^2} + \frac{(\tau - \tau')^3}{2.3}\frac{d^3L_1}{dt^3} + \ldots,$$

$$L''_1 = L_1 + (\tau - \tau'')\frac{dL_1}{dt} + \frac{(\tau - \tau'')^2}{2}\frac{d^2L_1}{dt^2} + \frac{(\tau - \tau'')^3}{2.3}\frac{d^3L_1}{dt^3} + \ldots,$$

....

On écrira autant d'équations linéaires de ce genre qu'on a de longitudes observées, et l'on en déduira, par la méthode la plus commode, $L_1, \frac{dL_1}{dt}, \frac{d^2L_1}{dt^2}$. Par les distances polaires observées $\beta'_1, \beta''_1, \beta'''_1, \ldots$ on obtiendra $\beta_1, \frac{d\beta_1}{dt}, \frac{d^2\beta_1}{dt^2}$, pour la même date t.

Si l'on n'employait que trois observations, on aurait tout avantage à partir de l'observation intermédiaire, et, en désignant les dates transformées par τ, τ', τ'', on aurait

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{(\tau''-\tau')^2(L'_1-L_1)+(\tau'-\tau)^2(L''_1-L'_1)}{(\tau''-\tau')(\tau''-\tau)(\tau'-\tau)} - \frac{1}{6}(\tau''-\tau')(\tau'-\tau)\frac{d^3L_1}{dt^3} - \ldots,$$

$$\frac{d^2L_1}{dt^2} = 2\frac{(\tau'-\tau)(L''_1-L'_1)-(\tau''-\tau')(L'_1-L_1)}{(\tau''-\tau')(\tau''-\tau)(\tau'-\tau)} - \frac{1}{3}[(\tau''-\tau')-(\tau'-\tau)]\frac{d^3L_1}{dt^3} - \ldots.$$

D'où l'on voit qu'en se bornant au premier terme, le seul qu'on

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

deuxième par $\cot\beta_1 \sin L_1$, la troisième par -1; mais nous remarquerons d'abord qu'en opérant de même sur les équations (1) et (2) on a

$$x\cot\beta_1\cos L_1 + y\cot\beta_1\sin L_1 - z = \xi\cot\beta_1\cos L_1 + \eta\cot\beta_1\sin L_1$$
$$= -R\cot\beta_1\cos(L_1 - \odot).$$

La somme susdite devient alors

$$(9)\quad \begin{cases} -R\cot\beta_1\cos(L_1-\odot)\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{1}{R^3}\right) \\ +\dfrac{2}{\sin^2\beta_1}d\rho\, d\beta_1 - \rho\cot\beta_1\, dL_1^2 - \dfrac{2\rho\cos\beta_1}{\sin^3\beta_1}d\beta_1^2 + \dfrac{\rho}{\sin^2\beta_1}d^2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Il est aisé d'éliminer $d\rho$ entre les équations linéaires (8) et (9). On a ainsi

$$(10)\qquad \rho = m\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right),$$

en désignant par m le coefficient suivant, qui ne contient que des quantités connues,

$$m = -R\,\frac{\sin\beta_1\cos\beta_1\cos(L_1-\odot)dL_1 + \sin(L_1-\odot)d\beta_1}{dL_1 d^2\beta_1 - d\beta_1 d^2L_1 - 2\,dL_1 d\beta_1^2\cot\beta_1 - \sin\beta_1\cos\beta_1\, dL_1^3},$$

Il faut joindre à (10) la valeur de r, donnée par l'équation (3).

L'élimination de r entre ces deux relations conduirait à une équation en ρ du huitième degré,

$$m^2 = \left[R^2 + 2R\rho\cos(L_1-\odot) + \frac{\rho^2}{\sin^2\beta_1}\right]^3\left(\rho+\frac{m}{R^3}\right)^2,$$

s'abaissant au septième, parce que le terme tout connu est nul; mais il est plus simple d'opérer sur les deux équations (10) et (3) par approximations successives, à l'aide d'une première valeur de ρ obtenue graphiquement ou par une première hypothèse.

Dès que ρ sera déterminé avec une exactitude suffisante, une des équations (6) donnera $d\rho$, les équations (4) donneront $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$, et les équations (2) feront connaître les coordonnées héliocentriques x, y, z.

Calcul des éléments de l'orbite.

On aura V^2 par $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$; puis a par $V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$.

S'il s'agit d'une petite planète, on est certain d'avance que a sera compris entre 2 et 4. S'il s'agit d'une comète, très probablement on trouvera $\frac{1}{a}$ très petit, d'un ordre de grandeur imputable aux erreurs d'observation, et l'on en conclura provisoirement que l'orbite est parabolique.

Supposons qu'il s'agisse d'une orbite elliptique. On calculera les aires

$$c = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

$$c' = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt},$$

$$c'' = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt};$$

puis on aura C par

$$C^2 = c^2 + c'^2 + c''^2,$$

et, comme $C^2 = a(1 - e^2)$, cette relation donnera e.

L'équation de l'ellipse, dans laquelle r, a, e sont déjà connus, donnera v ou $\mathcal{L} - \varpi$ pour la date t.

D'autre part, $a^3 n^2 = \mu$ (1); on en tire la durée de la révolution $T = \frac{2\pi}{n}$. Quant aux éléments i et N, on les obtient par

$$c = C\cos i, \quad c' = C\sin i \sin N, \quad c'' = -C\sin i \cos N.$$

Il reste à trouver ϖ, car nous n'avons encore que l'anomalie vraie $\mathcal{L} - \varpi$. Il est facile de voir que la longitude héliocentrique L est donnée par $\operatorname{tang} L = \frac{y}{x}$, et la longitude $\mathcal{L}$ dans l'orbite par

$$\operatorname{tang}(L - N) = \cos i \operatorname{tang}(\mathcal{L} - N);$$

nous aurons donc ϖ par $v - \mathcal{L}$.

---

(1) En rétablissant ici μ, nous reprendrons pour unité de temps le jour.

Enfin θ s'obtiendra par

$$r = a(1 - e\cos u),$$

d'où u qui figure dans

$$u - e\sin u = n(t - \theta)\text{ (}^1\text{)},$$

et par suite θ, date du passage au périhélie. Pour une planète, les aires sont décrites d'un mouvement direct, et

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

est positif. Dans le cas d'une comète, il y a autant de chances pour que l'aire c soit négative; on sera averti, dans ce cas, que le mouvement est rétrograde. S'il en est ainsi, il faudra ajouter 180° à la longitude précédente du nœud pour avoir celle du nœud ascendant.

---

(1) Ici t et θ sont exprimés en jours comme d'ordinaire.

CHAPITRE XVI.

DU MOUVEMENT DANS LA PARABOLE.

Avant d'exposer la méthode d'Olbers, nous réunirons ici les formules nécessaires au calcul des mouvements d'une comète parabolique.

Problème de Kepler dans la parabole.

L'équation polaire de la courbe est, en introduisant la distance focale au périhélie $q = \frac{1}{2}p$,

$$r = \frac{2q}{1+\cos v} = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v} = q\left(1+\tang^2\frac{1}{2}v\right).$$

Si l'on porte cette valeur de r et celle de

$$C^2 = p\mu = 2q\mu$$

dans l'équation des aires

$$r^2 dv = C dt,$$

on a, en divisant les deux membres par q^2,

$$\frac{dv}{\cos^4\frac{1}{2}v} = 2\frac{d\frac{1}{2}v}{\cos^2\frac{1}{2}v}\left(1+\tang^2\frac{1}{2}v\right) = \sqrt{\frac{2\mu}{q^3}}\,dt,$$

dont l'intégrale est, de $v = 0$ à v,

$$\tang\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\mu}{q^3}}\,(t-\theta),$$

θ étant la date à laquelle $v = 0$ (date du passage au périhélie).

De cette équation on tirera t, v étant connu, ou réciproquement. Dans ce dernier cas, il y aurait à résoudre une équation du troisième degré ayant une seule racine réelle.

Table de Barker.

Nous donnons, à la fin de ce Volume, une Table destinée à faciliter le calcul de cette équation. Elle est fondée sur la transformation suivante. Posons

$$75 \operatorname{tang}\frac{1}{2}v + 25 \operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v = \mathfrak{M} = 75\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-\theta).$$

Le facteur $75\sqrt{\frac{\mu}{2}}$ étant constant, représentons-le par k; on trouvera aisément $\log k = 9{,}9601278$.

On donne le nom de moyen mouvement diurne dans la parabole à

$$k \times q^{-\frac{3}{2}} = m.$$

Par suite, on écrira $\mathfrak{M} = m(t-\theta)$. La Table de Barker donne la valeur de $\mathfrak{M}$ pour tous les degrés de v et pour $q = 1$. S'il s'agit de calculer le v correspondant à la date t, dans une parabole ayant pour éléments q et θ, on commencera par calculer le moyen mouvement diurne m en retranchant $\frac{3}{2}\log q$ du logarithme constant $9{,}9601278$, puis on aura $\mathfrak{M}$ par $m(t-\theta)$, et enfin la Table donnera le v correspondant à cette valeur de $\mathfrak{M}$.

Inversement, s'il s'agit d'obtenir le $t-\theta$ qui répond à une anomalie vraie v, on cherchera dans la Table le $\mathfrak{M}$ correspondant et on aura immédiatement t par $\mathfrak{M} = m(t-\theta)$.

Étant donnés deux points et le foyer d'une parabole, calculer les éléments de cette trajectoire.

Soient r, r'' les rayons vecteurs, c la corde qui en unit les extrémités, q la distance périhélie inconnue, v, v'' les anomalies correspondantes aux rayons vecteurs. Il s'agit de calculer q, v et v'', et même θ si les dates sont données.

Désignons $v'' + v$ par s et $v'' - v$ par d. On aura la relation

$$c^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos d,$$

d'où

$$\sin^2 \frac{1}{2} d = \frac{c^2 - (r'' - r)^2}{4rr''};$$

puis, comme

$$v = \frac{1}{2}(s - d), \quad v'' = \frac{1}{2}(s + d),$$

$$\cos \frac{1}{4}(s - d) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}, \quad \cos \frac{1}{4}(s + d) = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r''}}.$$

En éliminant q entre ces deux dernières par addition et soustraction, il vient

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} s \operatorname{tang} \frac{1}{4} d = \frac{\sqrt{r''} - \sqrt{r}}{\sqrt{r''} - \sqrt{r}} = \frac{r'' - r}{r'' + r + 2\sqrt{rr''}}.$$

Si r, r'', c sont donnés, ces relations feront connaître d, s, v, v'', q, et si de plus on donne les dates t et t'' relatives aux deux rayons vecteurs, on calculera aisément θ, date du passage au périhélie.

Formule de Lambert.

Ainsi tout est déterminé par r, r'', c. Lambert a fait connaître une autre relation plus directe entre le temps $t'' - t$ et ces quantités. Elle joue un rôle important dans le calcul des orbites paraboliques.

On a évidemment, par la page précédente,

$$(1) \quad \begin{cases} (t'' - t)\sqrt{\dfrac{\mu}{2q^3}} = \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} v'' - \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} v + \dfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \dfrac{1}{2} v'' - \dfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \dfrac{1}{2} v \\ = \left(\operatorname{tang} \dfrac{1}{3} v'' - \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} v\right)\left(1 + \dfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \dfrac{1}{2} v'' + \dfrac{1}{3} \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} v'' \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} v + \dfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \dfrac{1}{2} v\right). \end{cases}$$

Ajoutons et retranchons au deuxième facteur la quantité $\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} v$, le second membre deviendra

$$\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} v'' - \operatorname{tang} \frac{1}{2} v\right)\left[1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} v'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} v'' - \operatorname{tang} \frac{1}{2} v\right)^2\right].$$

Introduisons les rayons vecteurs,

$$\tang \frac{1}{2} v'' - \tang \frac{1}{2} v = \frac{\sin \frac{1}{2}(v''-v)}{\cos \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v} = \frac{\sin \frac{1}{2}(v''-v)\sqrt{rr''}}{q},$$

$$1 + \tang \frac{1}{2} v \tang \frac{1}{2} v'' = \frac{\cos \frac{1}{2}(v''-v)}{\cos \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v} = \frac{\cos \frac{1}{2}(v''-v)\sqrt{rr''}}{q}.$$

L'équation (1) devient par là

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} (t''-t)\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} &= \sin \frac{1}{2}(v''-v)\cos \frac{1}{2}(v''-v)\frac{rr''}{q^2} \\ &+ \frac{1}{3}\sin^3 \frac{1}{2}(v''-v)\frac{(rr'')^{\frac{3}{2}}}{q^3}, \end{aligned} \right.$$

expression où il n'y a plus que l'angle $\frac{1}{2}(v''-v)$.

Or, de

$$c^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos(v''-v)$$

on tire

$$4rr'' \cos^2 \tfrac{1}{2}(v''-v) = (r''+r)^2 - c^2 = (r''+r+c)(r''+r-c).$$

Désignons ces deux derniers facteurs par x^2 et y^2, et écrivons

$$(3) \qquad 2\sqrt{rr''}\cos \tfrac{1}{2}(v''-v) = \pm xy, \quad r + r'' = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Quant à $\sin \frac{1}{2}(v''-v)$, en élevant au carré son développement, on obtient

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(v''-v) = \cos^2 \tfrac{1}{2} v'' + \cos^2 \tfrac{1}{2} v - 2\cos \tfrac{1}{2}(v''-v)\cos \tfrac{1}{2} v'' \cos \tfrac{1}{2} v,$$

d'où, en remplaçant les cosinus de $\frac{1}{2}v''$ et de $\frac{1}{2}v$ par leurs valeurs $\sqrt{\frac{q}{r''}}$ et $\sqrt{\frac{q}{r}}$,

$$\sin^2 \frac{1}{2}(v''-v) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r''} - 2q\frac{\cos \frac{1}{2}(v''-v)}{\sqrt{rr''}}.$$

A l'aide des équations (3), on trouve

$$2\sin \tfrac{1}{2}(v''-v)\sqrt{rr''} = (x \mp y)\sqrt{2q}.$$

Si l'on porte ces valeurs de $\sin \frac{1}{2}(v''-v)$ et de $\cos \frac{1}{2}(v''-v)$ dans l'équation (2), on aura finalement la formule de Lambert

$$2\sqrt{\mu}(t''-t) = (x \mp y)xy + \tfrac{1}{3}(x \mp y)^3 = \tfrac{1}{3}x^3 \mp \tfrac{1}{3}y^3,$$

ou

$$6\sqrt{\mu}(t''-t)=(r+r''+c)^{\frac{3}{2}}\mp(r+r''-c)^{\frac{3}{2}},$$

le signe — répondant au cas où $\frac{1}{2}(v''-v)$ est plus petit que 90°.

Table de Encke.

Avec cette formule, r, r'' et la corde c suffisent pour calculer le temps compris $t''-t$, sans avoir à calculer v'', v et q comme nous l'avons fait dans l'alinéa précédent.

Il est même facile d'y employer des séries en développant les puissances $\frac{3}{2}$ de $1\pm\frac{c}{r+r''}$. Posons $\frac{c}{r+r''}=\beta$, nous aurons

$$\frac{2\sqrt{\mu}(\tau''-\tau)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}=\beta-\frac{1}{24}\beta^3-\frac{1}{128}\beta^5-\ldots.$$

Représentons le premier membre par η et renversons la série :

$$\beta \text{ ou } \frac{c}{r+r''}=\eta\left(1+\frac{1}{24}\eta^2+\frac{5}{384}\eta^4+\frac{59}{9216}\eta^6+\ldots\right).$$

M. Encke a calculé là-dessus une petite Table d'un emploi très commode, que nous donnons avec celle de Barker. Elle a pour argument

$$\eta=\frac{2\sqrt{\mu}(t''-t)}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}},$$

et donne, sous la rubrique $\log\varepsilon$, le logarithme de la valeur de la série comprise ci-dessus entre parenthèses; on obtient ainsi bien facilement, quand les rayons vecteurs r et r'' ont été calculés, la corde c par

$$c=2\sqrt{\mu}(t''-t)\frac{\varepsilon}{(r+r'')^{\frac{1}{2}}}.$$

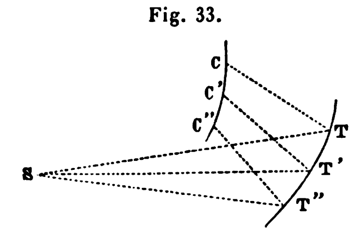
On en verra l'application au Chapitre suivant.

CHAPITRE XVII.

MÉTHODE D'OLBERS.

Géométriquement, le problème général revient à ceci : Étant données les droites indéfinies Tc, T$'c'$, T$''c''$ (*fig.* 33) dans la direction desquelles la comète a été vue aux dates t, t', t'', quand la Terre se trouvait en T, T$'$, T$''$, couper ces trois droites par un plan passant par le Soleil, en des points C, C$'$, C$''$ tels, que les secteurs de la courbe du second degré passant par ces trois points, avec un foyer

Fig. 33.



au Soleil, aient pour surfaces des aires égales à celles qu'on calculerait avec les éléments de cette courbe et les intervalles $t' - t$, $t'' - t'$. La solution algébrique de ce problème, même en le restreignant au cas simple d'une parabole, conduirait à une équation d'un degré très élevé; le seul moyen de l'éviter est de procéder par tâtonnements.

Équations relatives au plan de l'orbite.

La méthode s'applique à trois observations séparées par un petit nombre de jours. Désignons par C, C$'$, C$''$ les positions de la comète aux dates t, t', t''; par $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ les coordonnées

héliocentriques correspondantes. Si i et N sont l'inclinaison de l'orbite et la longitude héliocentrique de son nœud ascendant, les coordonnées des trois points devront satisfaire à l'équation du plan de cette orbite, plan qui passe par l'origine des coordonnées, le Soleil; de là les relations

$$
\begin{aligned}
z &+ \operatorname{tang} i \sin N x - \operatorname{tang} i \cos N y = 0,\\
z' &+ \operatorname{tang} i \sin N x' - \operatorname{tang} i \cos N y' = 0,\\
z'' &+ \operatorname{tang} i \sin N x'' - \operatorname{tang} i \cos N y'' = 0.
\end{aligned}
$$

On peut éliminer i et N de trois manières différentes entre les trois équations; on obtient ainsi d'abord

$$(x'y'' - y'x'')z - (xy'' - yx'')z' + (xy' - yx')z'' = 0.$$

Or $x'y'' - y'x''$ est le double de la projection du triangle SC′C″ sur le plan des xy, $x''y - yx''$ est le double de la projection du triangle SCC″ sur le même plan; de même $xy' - yx'$ est le double de la projection de SCC′. On aura donc, en représentant par α, α', α'' les aires de ces triangles,

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
\alpha x - \alpha' x' + \alpha'' x'' = 0,\\
\alpha y - \alpha' y' + \alpha'' y'' = 0,\\
\alpha z - \alpha' z' + \alpha'' z'' = 0.
\end{cases}
$$

En désignant par ρ, ρ', ρ'' les projections sur l'écliptique des distances TC, T′C′, T″C″ de la comète à la Terre, nous avons vu que

$$
(1\ bis)\qquad
\begin{cases}
z = \rho \cot \beta_1,\\
x = \rho \cos L_1 + R \cos \odot,\\
y = \rho \sin L_1 + R \sin \odot.
\end{cases}
$$

Portons ces expressions et leurs analogues pour les six autres coordonnées dans les équations (1), il viendra

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\alpha}{\alpha''}\rho \cot \beta_1 - \dfrac{\alpha'}{\alpha''}\rho' \cot \beta'_1 + \rho'' \cot \beta''_1 = 0,\\[2ex]
\dfrac{\alpha}{\alpha''}\rho \cos L_1 - \dfrac{\alpha'}{\alpha''}\rho' \cos L'_1 + \rho'' \cos L''_1 = -\dfrac{\alpha}{\alpha''} R \cos \odot + \dfrac{\alpha'}{\alpha''} R' \cos \odot' - R'' \cos \odot'',\\[2ex]
\dfrac{\alpha}{\alpha''}\rho \sin L_1 - \dfrac{\alpha'}{\alpha''}\rho' \sin L'_1 + \rho'' \sin L''_1 = -\dfrac{\alpha}{\alpha''} R \sin \odot + \dfrac{\alpha'}{\alpha''} R' \sin \odot' - R'' \sin \odot''.
\end{cases}
$$

Substitution du rapport des temps à celui des aires triangulaires.

Les aires triangulaires α, α', α'' sont inconnues, mais leurs rapports sont à peu près égaux à ceux des secteurs paraboliques correspondants, ou à ceux des temps $t''-t'$, $t''-t$, $t'-t$ employés par le rayon vecteur à parcourir ces derniers. Examinons d'abord jusqu'à quel point il nous sera permis de substituer les seconds rapports aux premiers. La série de Taylor permet d'écrire

$$z = z' - (t'-t)\frac{dz'}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1.2}\frac{d^2z'}{dt^2} - \frac{(t'-t)^3}{1.2.3}\frac{d^3z'}{dt^3} + \ldots$$

$$z'' = z' + (t''-t')\frac{dz'}{dt} + \frac{(t''-t')^2}{1.2}\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{(t''-t')^3}{1.2.3}\frac{d^3z'}{dt^3} + \ldots.$$

Éliminons la première dérivée et remplaçons $\frac{d^2z'}{dt^2}$ par $-\frac{\mu z'}{r'^3}$,

$$(3)\quad \frac{z-z'}{t'-t} + \frac{z''-z'}{t''-t'} = -\frac{\mu(t''-t)}{1.2}\frac{z'}{r'^3} + \frac{(t''-t')^2-(t'-t)^2}{1.2.3}\frac{d^3z'}{dt^3} - \ldots.$$

On aurait deux équations pareilles pour les coordonnées x et y. Si les intervalles $t''-t'$ et $t'-t$ sont égaux, le dernier terme disparaît; en négligeant les termes suivants, qui sont du troisième ordre de petitesse par rapport aux intervalles considérés, les deux équations analogues en x et en y seront

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{x-x'}{t'-t} + \dfrac{x''-x'}{t''-t'} = -\dfrac{\mu(t''-t)}{1.2}\dfrac{x'}{r'^3}, \\[2ex] \dfrac{y-y'}{t'-t} + \dfrac{y''-y'}{t''-t'} = -\dfrac{\mu(t''-t)}{1.2}\dfrac{y'}{r'^3}. \end{cases}$$

Éliminons entre les deux dernières le facteur $\frac{\mu(t''-t)}{1.2}\frac{1}{r'^3}$, il vient

$$\frac{xy'-yx'}{t'-t} = \frac{x'y''-y'x''}{t''-t'},$$

ou bien

$$\frac{\alpha}{\alpha''} = \frac{t''-t'}{t'-t}.$$

Quand les intervalles sont égaux, cette relation est exacte jusqu'aux termes du second ordre inclusivement. Elle a encore à peu près le même degré d'exactitude si les intervalles sont très peu différents. Nous supposerons qu'on aura choisi des observations satisfaisant à la condition que $t'' - t'$ diffère peu de $t' - t$. Dès lors on sera en droit de remplacer, dans les équations (2), $\frac{x}{x''}$ par $\frac{t'' - t'}{t' - t}$. Il n'en est plus de même de l'autre rapport $\frac{x'}{x''}$; il n'est assimilable à $\frac{t'' - t}{t' - t}$ qu'aux quantités du premier ordre près, et, comme nous le verrions figurer dans cette analyse avec un diviseur fort petit (ainsi du reste que le premier rapport), l'erreur passerait du premier ordre de petitesse à un ordre supérieur, c'est-à-dire à l'ordre des quantités mesurées, et les résultats du calcul en pourraient être profondément viciés. Nous devrons donc considérer $\frac{x'}{x''}$ comme une inconnue à éliminer entre les équations (2). Multiplions la deuxième par $\sin\delta'$ et retranchons-en la troisième multipliée par $\cos\delta'$:

$$\frac{x}{x''}\rho\sin(L_1 - \delta') - \frac{x'}{x''}\rho'\sin(L'_1 - \delta')$$
$$+ \rho''\sin(L''_1 - \delta') = -\frac{x}{x''}R\sin\delta - \delta' + R''\sin(\delta'' - \delta')$$

En la combinant avec la première des équations (2), $\frac{x'}{x''}\rho'$ disparaît :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{x''}\rho[\cot\beta_1\sin(L_1 - \delta') - \cot\beta_1\sin(L_1 - \delta')] \\ &\quad + \rho''[\cot\beta''_1\sin(L'_1 - \delta') - \cot\beta'_1\sin(L''_1 - \delta')] \\ &\quad\quad = \left[\frac{x}{x''}R\sin(\delta - \delta') - R''\sin(\delta'' - \delta')\right]\cot\beta_1. \end{aligned}\right.$$

Formules finales et tâtonnements.

Si l'on introduit le facteur R' dans le deuxième membre, les produits $RR'\sin(\delta - \delta')$, $R''R'\sin(\delta'' - \delta')$ seront les doubles aires triangulaires STT', $ST''T'$ relatives à la Terre, aires dont le rapport est sensiblement égal à celui des temps, avec plus d'exactitude

même que le rapport des aires triangulaires relatives à la comète. Si donc nous remplaçons $\frac{\alpha}{\alpha''}$ par $\frac{t''-t'}{t'-t}$, le second membre peut être remplacé par zéro, et l'équation (4) nous donnera le rapport $\frac{\rho''}{\rho}$, que nous désignerons par M; elle s'écrira

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho'' = M\rho,\\ &M = \frac{t''-t'}{t'-t}\,\frac{\cot\beta'_1 \sin(L_1 - \odot') - \cot\beta_1 \sin(L'_1 - \odot')}{\cot\beta''_1 \sin(L'_1 - \odot') - \cot\beta'_1 \sin(L''_1 - \odot')}.\end{aligned}\right.$$

Dès lors, nous remplacerons ρ'' par $M\rho$ dans les expressions de r^2, r''^2, c^2, que l'on déduit des relations (1 *bis*), et nous écrirons

$$(6)\qquad r^2 = \frac{1}{\sin^2\beta_1}\rho^2 + 2R\rho\cos(L_1 - \odot) + R^2,$$

$$(7)\qquad r''^2 = \frac{M^2}{\sin^2\beta''_1}\rho^2 - 2MR''\rho\cos(L''_1 - \odot'') + R''^2,$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} c^2 = {} & r^2 + r''^2 - 2RR''\cos(\odot'' - \odot)\\ & - 2M\rho^2[\cos(L''_1 - L_1) + \cot\beta_1 \cot\beta''_1]\\ & - 2R''\rho\cos(L_1 - \odot'') - 2MR\rho\cos(L''_1 - \odot).\end{aligned}\right.$$

Si l'on joint à ces relations celle de Lambert,

$$(9)\qquad 6\sqrt{\mu}(t''-t) = (r + r'' + c)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - c)^{\frac{3}{2}},$$

qui doit être satisfaite rigoureusement, le problème se trouvera complètement résolu, puisque l'élimination de r, r'', c donnera une équation en ρ seul. Cette équation étant d'un degré très élevé, il est beaucoup plus simple de procéder par tâtonnement. Donnant à ρ une première valeur arbitraire, on calcule r, r'', c et on porte leurs valeurs dans la dernière. Si celle-ci n'est pas exactement satisfaite, on poursuit les tâtonnements et, après quelques essais, lorsqu'on s'est approché du but, on interpole entre les valeurs assignées à ρ de manière à faire disparaître le dernier résidu.

Mais il est bien plus simple de recourir à la petite table d'Encke. On commence par faire une hypothèse, non pas sur ρ, mais sur $r + r''$. Quand il n'y a pas de circonstance par-

ticulière sur laquelle on puisse se guider, on fera à tout hasard $r + r'' = 2$. Avec cette valeur et l'intervalle $t'' - t$, on calculera η_1, puis, par la Table d'Encke, $\log\varepsilon$ et enfin c Avec cette valeur de c, l'équation (8) donnera ρ, par suite r et r''. Si on retombe ainsi sur $r + r'' = 2$, le tâtonnement est terminé. Il n'en sera sans doute pas ainsi, et alors on recommencera les calculs en prenant cette fois, pour $r + r''$, la valeur que l'on vient d'obtenir. Deux ou trois essais suffisent d'ordinaire pour fournir une valeur de c qui satisfasse exactement à la condition fondamentale de faire parcourir le secteur compris entre r et r'' dans le laps de temps observé $t'' - t$.

Calcul des éléments de l'orbite.

La question se réduit désormais à calculer les éléments de l'orbite d'après les deux positions extrêmes.

1° On obtiendra la distance périhélie q, les anomalies v et v'' et la date θ du passage au périhélie par les formules de la page 162.

2° On aura les coordonnées héliocentriques L et β par les formules de la page 153 :

$$\begin{aligned} z &= r\cos\beta = \rho\cot\beta_1, \\ x &= r\sin\beta\cos L = \rho\cos L_1 + R\cos\odot, \\ y &= r\sin\beta\sin L = \rho\sin L_1 + R\sin\odot. \end{aligned}$$

auxquelles on peut donner la forme (en retranchant $\odot$ de tous les angles)

$$\begin{aligned} r\cos\beta &= \rho\cot\beta_1, \\ r\sin\beta\cos(L - \odot) &= \rho\cos(L_1 - \odot) + R, \\ r\sin\beta\sin(L - \odot) &= \rho\sin(L_1 - \odot). \end{aligned}$$

On calculera de même β'', L'' pour l'époque de la troisième observation. La comète sera directe ou rétrograde suivant que L'' sera plus grand ou plus petit que L.

3° On calculera N et i par les relations

$$\begin{aligned} \tang i \sin(L - N) &= \pm\cot\beta, \\ \tang i \cos(L - N) &= \pm\frac{\cot\beta'' - \cot\beta\cos(L'' - L)}{\sin(L'' - L)}. \end{aligned}$$

On prendra le signe + si la comète est directe, le signe — si elle est rétrograde; $\tang i$ doit être positif et $i < 90^\circ$.

4° On aura les longitudes dans l'orbite $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}''$ par la formule

$$\tang(L - N) = \cos i \tang(\mathfrak{L} - N).$$

5° On obtiendra la longitude du périhélie par

$$v = \mathfrak{L} - \varpi.$$

6° On calculera l'époque θ du passage de la comète au périhélie en cherchant dans la Table de Barker la valeur de $\mathfrak{M}$ qui répond à l'anomalie v :

$$\theta = t \pm \frac{\mathfrak{M}}{m} = t'' \pm \frac{\mathfrak{M}''}{m},$$

le signe — s'appliquant aux comètes directes et le signe + aux rétrogrades.

A titre de vérification indispensable, on calculera par ces éléments, pour l'époque moyenne t', les coordonnées géocentriques L'_1 et β'_1, et on les comparera aux coordonnées observées.

Portée des résultats.

Cependant on ne doit pas s'attendre à un accord parfait pour les deux coordonnées à la fois. Cet accord peut être exigé quand il s'agit d'une orbite elliptique, parce qu'alors on a six éléments à déduire de six données. Ici le nombre des éléments n'est plus que de cinq. Il y a une donnée de trop, et, bien qu'on ait employé à la fois L'_1, β'_1 dans les calculs, ce n'est que dans le rapport M que ces deux quantités figurent, et encore par une combinaison qui les réduit pour ainsi dire à une seule donnée. Elles ne servent qu'à déterminer la direction du rayon vecteur SC' par l'intersection du plan SCC'' avec le plan ST'C' de la *fig.* 33 [1]. La seule chose que

[1] Si les données sont telles que ces deux plans se confondent exactement ou à peu près, la méthode d'Olbers se trouve en défaut. C'est ce dont on est averti par la forme que prend alors le rapport M, dont les deux termes sont alors évanouissants ou du moins très petits, en sorte que la moindre erreur d'observation a une grande influence sur sa détermination. Cette défaillance de la méthode d'Olbers se présente quand les trois positions observées de la comète se trouvent, à peu de chose près, sur un même grand cercle passant par le lieu du Soleil à la date t'.

puisse faire la méthode d'Olbers, c'est de placer la comète dans ce dernier plan, ou, en d'autres termes, sur le grand cercle qu'il détermine sur la sphère céleste. Pour obtenir un accord complet entre les L'_1, β'_1 calculés et les L'_1, β'_1 observés, on devra faire varier quelque peu le rapport M, dont la valeur n'est qu'approximativement déterminée par la formule (5).

Il peut arriver cependant que les écarts soient notables et qu'aucun procédé de correction ne puisse les faire disparaître. C'est qu'alors le rayon vecteur sera en réalité un peu plus petit ou un peu plus grand que ne le comporte la courbure d'une parabole appelée à satisfaire aux données. Au lieu d'une orbite parabolique, on aura affaire à une ellipse fortement caractérisée. Il faudra abandonner la méthode d'Olbers pour recourir à celle de Laplace, et on aura la satisfaction d'obtenir, en fin de compte, la durée de la révolution d'une nouvelle comète périodique. Mais il faut des observations bien précises et une ellipticité bien prononcée pour que la déviation de la forme parabolique devienne sensible dans le petit arc qu'une comète décrit en une semaine ou deux.

Emploi du catalogue des comètes.

Après cette indispensable vérification, on ouvrira la Table des comètes ([1]) et l'on comparera les éléments nouveaux à ceux des comètes antérieures. Peut-être aura-t-on la chance d'y retrouver des éléments analogues pour q, i, N et ϖ. Alors l'identité des deux astres serait bien probable, et il resterait à déterminer la durée de la révolution, à rechercher si, dans l'intervalle des deux passages au périhélie, la comète a fait quelque apparition intermédiaire. Ce sont là les bonnes fortunes du calculateur. La découverte d'une comète périodique ajoute un élément nouveau au système solaire et conduit souvent à des résultats du plus haut intérêt. C'est par des comparaisons de ce genre que Halley a découvert la périodicité de la célèbre comète qui porte son nom.

([1]) Cette Table, la plus complète de celles qui existent actuellement, m'a été fournie par M. Lœwy. On la trouvera à la fin de ce Volume.

Exemple numérique.

Désireux de faciliter ces calculs aux débutants, je donnerai ici un exemple complet en choisissant la comète de 1769, sur laquelle Olbers a fait lui-même la première application de sa méthode.

CHAPITRE XVIII.

CALCUL DE L'ORBITE DE LA COMÈTE DE 1769.

OBSERVATIONS.

Dates.	T. m. de Paris.	Longitudes.	Dist. au pôle de l'écliptique.
	h m	° ′ ″	° ′ ″
Sept. 4......	14.0	$L_1 =$ 80.56.11	$\beta_1 =$ 107.51.39
8......	14.0	$L'_1 =$ 101. 0.54	$\beta'_1 =$ 112. 5. 2
12.....	14.0	$L''_1 =$ 124.19.22	$\beta''_1 =$ 113.43.55

LIEUX DE LA TERRE (*Connaissance des Temps*).

	° ′ ″		
δ..........	342.42. 5	log R.........	0,003132
δ′..........	346.35.31	log R′.........	0,002665
δ″..........	350.29.20	log R″.........	0,002184

CALCUL DE M.

log cot β'_1.....	9,60824 n	log cot β'_1.....	9,50817 n
log sin(L'_1 — δ).	9,99875	log sin(L'_1 — δ′)	9,95929
	9,60699 n		9,46746 n
1er terme......	—0,404565	2e terme.......	—0,293402
log cot β''_1.....	9,64309 n	log cot β'......	9,60824 n
log sin(L'_1 — δ′)	9,95929	log sin(L''_1 — δ′)	9,82777
	9,60238 n		9,43600 n
3e terme......	—0,400295	4e terme.......	—0,272900
1er terme......	—0,404565	3e terme.......	—0,400295
2e terme......	—0,293402	4e terme.......	—0,272900
Num.........	—0,111163	Dén.........	—0,127395

log Num.......	9,04596 n
log Dén.......	9,10515 n
log M.........	9,94081

CALCUL DES RAYONS VECTEURS.

$\log R^2$	0,006264	$\log R''^2$	0,00437
$\log 2$..........	0,30103	$\log 2$.........	0,30103
$\log R$..........	0,00313	$\log R''$........	0,00218
$\log\cos(L_1 - \delta)$.	9,15604	$\log\cos(L''_1 - \delta'')$	9,84048
		$\log M$	9,94081
	9,46021		0,08450
Nombre	0,28854	Nombre	1,21478
$\log \text{séc}\, \beta_1$......	0,02145	$\log \text{séc}^2\, \beta''_1$....	0,07674
$\log \text{séc}^2\, \beta_1$.....	0,04290	$\log M^2$........	9,88162
			9,95836
		Nombre	0,90857

$$r^2 = 1,01453 - [9,46021]\rho + [0,04290]\rho^2 \quad (^1)$$
$$r''^2 = 1,01011 - [0,08450]\rho + [9,95836]\rho^2$$

CALCUL DE LA CORDE.

....	0,30103	$\log 2$...........	0,30103	$\log 2$..........	0,30103
....	0,00313	$\log R''$..........	0,00218	$\log M$	9,94081
....	0,00218	$\log\cos(L_1 - \delta'')$..	7,89267 n	$\log\cos(L''_1 - L_1)$.	9,86138
$(\delta'' - \delta)$.	9,99598				
	0,30232		8,19588 n		0,10322
e	2,00596	Nombre.......	−0,01570	Nombre........	1,26828

$\log 2$..........	0,30103	$\log 2$.......... .	0,30103
$\log R$..........	0,00313	$\log \cot \beta_1$.......	9,50817 n
$\log\cos(L''_1 - \delta_1)$	9,89427 n	$\log \cot \beta''_1$.......	9,64309 n
$\log M$...	9,94081	$\log M$...........	9,94081
	0,13924 n		9,39310
Nombre.....	−1,37799	Nombre........	0,24723

		+0,01570	−1,26828
		+1,37799	−0,24723
	−2,00596	+1,39368	−1,51551
$r^2 + r''^2$.......	+2,02464	−1,50332	2,01240
$c^2 =$	0,01868	$-0,10964\rho$	$0,49689\rho^2$

(1) Les nombres entre crochets sont des logarithmes.

Les équations numériques à résoudre sont donc

(1) $r^2 = 1,01453 - [9,46021]\rho + [0,04290]\rho^2,$

(2) $r''^2 = 1,01011 - [0,08450]\rho + [9,95836]\rho^2,$

(3) $c^2 = 0,01868 - [9,03997]\rho + [9,69626]\rho^2,$

auxquelles il faut joindre l'équation de Lambert.

Pour le calcul de cette dernière nous aurons

$\log 2\sqrt{\mu}$	8,5366119 — 10
$\log(t'' - t)$	0,90309
$\log 2\sqrt{\mu}(t'' - t)$	9,43970 — 10

et nous nous servirons de la petite Table de Encke pour calculer c au moyen d'une valeur attribuée à $r + r''$.

Tâtonnements.

La somme $r + r''$ doit être notablement moindre que 2, à cause des termes négatifs qui entrent dans les expressions de r et de r''. Nous ferons d'abord $r + r'' = 1,8$. Avec cette valeur, nous calculerons η, puis la Table de Encke nous donnera ε et, par suite, c, de manière à satisfaire exactement à la condition $t'' - t = 8^j$.

1re *supposition* : $r + r'' = 1,8$

$\log(r + r'')$	0,25527	$\log \varepsilon$	0,000236
$\frac{1}{2}\log(r + r'')$	0,12764	$\log 2\sqrt{\mu}(t'' - t)$ ..	9,43970
$\log(r + r'')^{\frac{3}{2}}$	0,38291		9,43994
$\log 2\sqrt{\mu}(t'' - t)$ ...	9,43970	$\log(r + r'')^{\frac{1}{2}}$	0,12764
$\log \eta$	9,05679	$\log c$	9,31230
η	0,11397	$\log c^2$	8,62460
d'où $\log \varepsilon$	0,000236	c^2	0,042131

Avec cette valeur de c^2, l'équation (3) devient

$$0 = 0,023453 - [9,03997]\rho + [9,69626]\rho^2.$$

On en tire $\log \rho = 9,54899$.

Avec cette valeur de ρ, on calcule r et r'' par les équations (1) et (2). On obtient ainsi

r..........	1,02504
r''.........	0,83307
$r + r''$.....	1,85811

C'est cette valeur de $r + r''$ que nous allons adopter pour la seconde approximation.

2° *supposition* : $r + r'' = 1,85811$.

En recommençant, avec cette seconde valeur, les calculs précédents, on trouve

r..........	1,02373
r''.........	0,83494
$r + r''$.....	1,85867

Si l'on procédait à un troisième calcul en partant de cette dernière valeur, on retomberait identiquement sur la même somme. Une simple interpolation suffit et donne $\log \rho = 9,54210$, puis

r..........	1,023716
r''.........	0,834196
c..........	0,201983

Avec ces nombres on procède immédiatement au calcul des cinq éléments de l'orbite. Mais nous allons d'abord vérifier le degré d'exactitude de l'hypothèse sur laquelle repose cette méthode, à savoir $\frac{\alpha}{\alpha''} = \frac{t'' - t'}{t' - t}$. D'ailleurs ce calcul nous donnera la distance périhélie et les deux anomalies v, v''.

D'abord la formule de la page 162

$$\sin^2 \frac{1}{2} d = \frac{[c - (r'' - r)][c + (r'' - r)]}{4 r r''}$$

donne

$$\frac{1}{2} d = \frac{1}{2}(v'' - v) = 2^\circ 13' 41''.$$

Ensuite l'équation

$$\tang \frac{1}{4} s \tang \frac{1}{4} d = \frac{r'' - r}{r + r'' + 2\sqrt{r r''}}$$

donne

	° ′ ″
$\frac{1}{4}s$..........	110.54.16
$\frac{1}{2}s$..........	221.48.32
$\frac{1}{2}d$..........	2.13.41
v...........	219.34.51
v''...........	224. 2.13

La relation $r\cos^2\frac{1}{2}v = q$ ou $r''\cos^2\frac{1}{2}v'' = q$ fait connaître

$$\log q = 9{,}06951.$$

Enfin on a θ, date du passage au périhélie, par

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-\theta) = \tang\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}v,$$

et l'on trouve ainsi

$t-\theta$.........	$-32{,}8315$
t............	4.5833 septembre,

d'où

θ.............	7,4148 octobre,

ou bien octobre 7 à 10 heures.

Cela posé, calculons r' et v' pour la date du 8 septembre. Le logarithme de la constante k de la Table de Barker est 9,9601278.

$\log k$.......	9,96013		
$\log q^{\frac{3}{2}}$	8,60426	$\log\cos^2\frac{1}{2}v'$ ..	9,10038
$\log m$......	1,35586	$\log q$	9,06951
$\log(t'-\theta)$.	1,45987n	$\log r'$	9,96913
$\log \mathfrak{M}$	2,81563n	$\log r$.......	0,01018
		$\log\sin(v'-v)$.	8,54324
		1er triangle....	8,52255

La Table donne pour cette valeur de $\mathfrak{M}$:

		$\log r'$.........	9,96913
v'......	221°34′59″	$\log r''$.........	9,92166
$\frac{1}{2}v'$.....	110°47′30″	$\log\sin(v''-v')$.	8,63161
		2e triangle.....	8,52240
		1er triangle	8,52255
		log rapport....	9,99985
		Nombre.......	0,99969

Ainsi $\frac{\alpha}{\alpha''} = 0{,}99969$, tandis que le rapport $\frac{t''-t'}{t'-t} = 1$. L'erreur 'est que de 0,00031. Si les intervalles étaient très inégaux, cette reur serait plus forte; mais on vient de voir le moyen de la corger : c'est de porter cette valeur plus exacte dans l'expression e M (p. 169) et de recommencer le calcul.

Calcul des éléments (p. 170).

1° Coordonnées héliocentriques.

$\log\rho$	9,54210	$\log\rho''$	9,48291
$\log r$	0,01018	$\log r''$	9,92166
	9,53192		9,56124
$\log\cot\beta$	9,50817n	$\log\cot\beta''_{\mathrm{I}}$	9,64309n
$\log\cos\beta$	9,04009n	$\log\cos\beta''$	9,20433n
β	96°17′47	β''	99°12′41″
$\log\frac{\rho}{r}$	9,53192	$\log\frac{\rho''}{r''}$	9,56124
$\log\sin(L_{\mathrm{I}}-\delta)$	9,99550	$\log\sin(L''_{\mathrm{I}}-\delta'')$	9,85815
C$^{\mathrm{t}}\log\sin\beta$	0,00263	C$^{\mathrm{t}}\log\sin\beta''$	0,00564
$\log\sin(L-\delta)$	9,53005	$\log\sin(L''-\delta'')$	9,42503

$L-\delta$	19°48′31″	$L''-\delta''$	15°25′54″
δ	342.42. 5	δ''	350.29.20
L	2.30.36	L″	5.55.14
L″	5.55.14	Mouvement direct.	
L″ — L	3.24.38		

2° Calcul de N.

$\log\cot\beta$	9,04272n	$\log\cot\beta$	9,04272n
$\log\cos(L''-L)$	9,99923	$-\log\sin(L''-L)$	8,77445
	9,04195n	log num	7,81717n
Nombre	−0,110142	log dén	8,71623n
$\cot\beta''$	−0,162169	$\log\tang(L-N)$	9,10094
Dén. $\cot\beta''$ — nom.	−0,052027	L — N	187°11′27″
log dén	8,71623n	L	2.30.36
		N	175.19. 9

CALCUL DE i ET DE ϖ.

$\log\cot\beta$	$9{,}04272\,n$	$\mathcal{L} - \mathrm{N}$	$189°.32'.48''$
$-\log\sin(\mathrm{L}-\mathrm{N})$.	$9{,}09751\,n$	N	$175.19.\ 9$
$\log\operatorname{tang} i$	$9{,}94521$	$\mathcal{L}$	$4.51.47$
i	$41°23'42''$	$v = \mathcal{L} - \varpi$ ..	$219.34.59$
$\log\operatorname{tang}(\mathrm{L}-\mathrm{N})$.	$9{,}10094$	ϖ	$145.16.48$
$-\log\cos i$	$9{,}87516$		
$\log\operatorname{tang}(\mathcal{L}-\mathrm{N})$.	$9{,}22578$		

Voici donc les éléments approchés de l'orbite de la comète de 1769 :

		Éléments de Legendre
Passage au périhélie.	7 oct. à 10^{h}	7 oct. à $12^{h}44^{m}38^{s}$
Distance périhélie..	0,11736	0,1230401
Long. du périhélie..	$145°.17'$	$144°.11'.32''$
Long. du nœud asc.	175.19	175. 3.40
Inclinaison	41.24	40.47.56
Sens du mouvement.	Direct	Direct.

Les éléments de Legendre ont été calculés sur l'ensemble des observations. Je les mets en regard des premiers pour faire apprécier le degré d'approximation auquel on peut prétendre par des calculs fondés sur un intervalle de huit jours. On obtiendrait beaucoup mieux aujourd'hui, parce que les observations actuelles de comètes sont incomparablement plus exactes qu'au siècle dernier.

Utilité des éphémérides des comètes nouvelles.

Ces premiers calculs servent d'abord à comparer la nouvelle comète à celles qui ont paru autrefois. Ils indiquent en outre très approximativement la marche que la comète va suivre. Pour cela, on construit une éphéméride; en d'autres termes, on calcule d'avance, de quatre jours en quatre jours par exemple, les coordonnées géocentriques et la distance à la Terre. On juge ainsi d'avance de l'époque à laquelle la comète, d'abord télescopique, peut devenir visible à l'œil nu, de celle où se développera sa queue, de la durée totale de son apparition pour l'un ou l'autre hémisphère, etc.

On admet, pour les petites planètes dont le diamètre est insensible, que leur éclat varie en raison inverse du produit $r^2 r_1^2$, c'est-à-dire du carré de la distance au Soleil multiplié par le carré de la distance à la Terre. Si donc on a remarqué, à l'époque de la découverte, l'éclat que l'astre présentait alors, on sera en état d'apprécier plus ou moins celui qu'il aura à d'autres époques. Cette notion est importante pour l'astronome qui doit se préparer à l'observation. Mais, pour ce qui concerne les comètes dont la tête a des dimensions considérables et dont la figure change du tout au tout, cette évaluation ne doit guère s'appliquer qu'au petit point brillant, central, qu'on nomme le *noyau* et dont les astronomes déterminent la position.

CHAPITRE XIX.

CORRECTION DES PREMIERS ÉLÉMENTS.

Ces premiers éléments fournissent d'abord le moyen d'appliquer aux observations des comètes les corrections nécessaires de parallaxe et d'aberration qu'on a dû d'abord omettre, faute de connaître la distance de l'astre à la Terre.

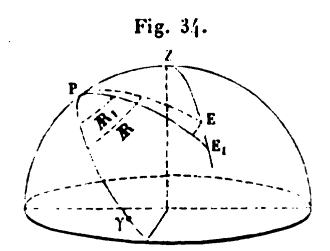
On observe presque toujours une comète à l'équatorial, en la comparant à une étoile connue, choisie à peu près sur son parallèle. L'instrument étant fixé, pendant que la comète traverse le champ on mesure, à l'aide du fil mobile du réticule et de la vis du micromètre, la différence de déclinaison entre l'axe optique et le noyau de la comète; puis on note à la pendule sidérale les instants du passage de la comète aux fils horaires du réticule. Quelques instants après, apparaît l'étoile de comparaison qu'on observe exactement de la même manière. Si dans l'intervalle de ces observations la lunette ne s'est pas déplacée, on obtient ainsi les différences d'Æ et de δ entre l'étoile et la comète. Les coordonnées de l'étoile étant calculées pour ce jour-là, on aura celles de la comète en y ajoutant les différences observées.

Corrections de parallaxe et d'aberration.

La différence de distance polaire doit être très petite; on évite d'ailleurs d'observer trop près de l'horizon; l'effet de la réfraction sera donc généralement négligeable. Il n'en est pas de même de la parallaxe. Soit r_1 la distance de la comète à la Terre; la parallaxe horizontale p sera donnée par $\frac{\rho}{r_1} = \sin p$, ρ désignant ici le rayon local de la Terre. Son effet est de faire voir l'astre un peu plus bas que si l'observateur était au centre de la Terre. Considérez

maintenant le triangle PZE; E étant la position de l'astre vu du centre de la Terre; E_1, placé sur le vertical ZE, la position appa-

Fig. 34.



rente, c'est-à-dire vue par l'observateur; PEZ l'angle de position; on aura $EE_1 = p \sin z_1$ sensiblement, et

$$\delta_1 - \delta = p \sin z_1 \sin E = p \sin\lambda \sin \mathit{H},$$

$$(Æ_1 - Æ) \sin\delta = -p \sin z_1 \cos E = -p(\cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos \mathit{H}).$$

Quant à l'aberration, on verra, au Livre suivant, que la lumière met à venir, de la comète à nous, un temps égal à $\frac{r_1}{W}$, W étant la vitesse de la lumière. Or $W = \frac{a}{498}$, a étant la distance moyenne de la Terre au Soleil. Comme r_1 est exprimé en parties de cette unité-là, le temps en question est de $r_1 \times 498^s$. Soit t la date à laquelle l'observateur a déterminé la position de la comète; ses coordonnées répondent réellement à une époque antérieure de $r_1 \times 498^s$. Il suffira donc de retrancher cette quantité de la date t pour tenir compte de l'aberration.

On pourrait encore conserver la date t et retrancher, des coordonnées de la comète, les corrections

$$\frac{dÆ}{dt} \times r_1 \times 498, \quad \frac{d\delta}{dt} \times r_1 \times 498,$$

$\frac{dÆ}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ étant les variations des coordonnées pour 1^s de temps.

Ces corrections, négligées dans une première ébauche des éléments, sont indispensables pour les calculs ultérieurs plus précis, car les forces agissantes sont relatives aux directions réelles et

non à celles dans lesquelles l'observateur voit l'astre dont il s'agit d'étudier les mouvements. Après les avoir appliquées aux coordonnées équatoriales Æ et δ, on transformera celles-ci en coordonnées écliptiques L_1 et β_1, en employant chaque fois l'obliquité apparente ω, donnée de 10^j en 10^j par la *Connaissance des Temps*.

Ces longitudes se trouvent ainsi comptées du point vernal actuel. Nous verrons, au Livre suivant, que ce point se déplace lentement, en vertu de la précession et de la nutation. Il en résulte, dans ces coordonnées, de petites variations qui n'ont rien de commun avec les mouvements réels de l'astre observé; il faut donc les corriger de ces deux effets avant de les introduire dans les formules précédentes; en d'autres termes, il faut les rapporter à une même origine ♈ parfaitement fixe, et relative à une date d'ailleurs arbitraire. C'est ce qu'on fait en retranchant, de chaque longitude apparente, la nutation (prise à vue dans la *Connaissance des Temps*) et l'effet de la précession pour le temps écoulé entre la date de l'observation et l'instant pris pour époque, à raison de $50'',2$ par an, ou de $0'',14$ par jour.

On agira de même pour les longitudes $\odot$ du Soleil, ou celles de la Terre ♁ $= \odot \pm 180°$, prises dans la *Connaissance des Temps*; on en retranchera l'aberration d'environ $20'',4$, la nutation et la précession, afin d'avoir, pour le Soleil aussi, les directions vraies et rapportées au même point ♈, ou, comme le disent les astronomes, les longitudes vraies comptées de l'équinoxe moyen d'une époque déterminée.

De cet ensemble de corrections, les seules qu'on ne puisse appliquer dès le début sont évidemment celles qui exigent la connaissance de la distance de l'astre à la Terre. On les néglige tout d'abord. Mais, dès qu'on possède les éléments approchés de l'orbite, on est en état de les appliquer aux observations, et c'est des coordonnées L_1 et β_1, ainsi corrigées de la parallaxe et de l'aberration, puis rapportées à l'équinoxe moyen d'une certaine date fixe, que nous allons nous occuper.

Correction des premiers éléments de l'orbite.

Les premiers éléments donnent le moyen de calculer jour par jour la position de l'astre étudié. On a ainsi une série de valeurs

de ses coordonnées écliptiques pour des dates équidistantes, coordonnées rapportées naturellement à l'équinoxe moyen de l'époque adoptée pour ces éléments. On en déduit, par interpolation, les coordonnées géocentriques L_1 et β_1 pour les dates des observations que l'on aura recueillies. En les comparant aux coordonnées observées, on aura les écarts ou erreurs de la première orbite. La seconde approximation aura pour but de modifier les éléments de manière à faire disparaître ces erreurs.

Ici l'on pourrait suivre la marche que nous avons indiquée pour les planètes anciennes. Elle consiste à former des équations de condition linéaires entre ces écarts et les six corrections ∂a, ∂e, $\partial \zeta_0$, $\partial \varpi$, ∂i, ∂N des éléments, puis à traiter ces équations par la méthode des moindres carrés. Mais cela suppose que les corrections cherchées sont assez petites pour que leurs puissances supérieures à la première soient négligeables. Il n'en est pas ainsi d'ordinaire lorsqu'on ne possède encore qu'une simple ébauche de l'orbite, calculée sur des observations très rapprochées. Il faut donc procéder autrement.

Le moyen le plus simple consiste à porter les écarts, entre les L_1 observés et les L_1 tirés de l'éphéméride, sur une feuille de papier quadrillé, et à construire la courbe de ces écarts en prenant le temps pour abscisse. Avec un peu de soin, en s'attachant à faire passer une courbe à courbure bien continue aussi exactement que possible par les points marqués sur l'épure, de manière que les déviations en plus équivalent à peu près aux déviations en moins, on compensera de très près les erreurs accidentelles de l'observation. On opérera de même pour les écarts en β_1.

Il ne restera plus qu'à choisir, dans les parties les mieux déterminées de ces courbes, trois dates aussi éloignées que possible pour lesquelles on aura calculé les coordonnées de la comète ; les deux épures en feront connaître les corrections. Avec ces trois positions *normales*, c'est le terme consacré, on procède à un nouveau calcul des éléments de l'orbite.

S'il s'agit d'une comète parabolique, on emploiera encore la méthode d'Olbers, avec cette seule différence qu'on substituera, au rapport des intervalles de temps $\frac{t''-t'}{t'-t}$, le rapport $\frac{\alpha}{\alpha''}$ des aires des triangles $\widehat{r''r'}$, $\widehat{r'r}$ calculées par les premiers éléments. S'il s'agit

d'une orbite plus ou moins elliptique, on déduira de l'épure plusieurs positions normales espacées aussi régulièrement que possible, et on leur appliquera la méthode de Laplace. Trois positions suffiraient si l'on avait recours à la belle méthode de Gauss, à l'aide de laquelle on obtiendrait des éléments qui satisferaient rigoureusement à ces trois positions; mais les limites de cet Ouvrage ne nous permettent pas de l'exposer ici.

CHAPITRE XX.

FIGURE DES COMÈTES. — FORCE RÉPULSIVE.

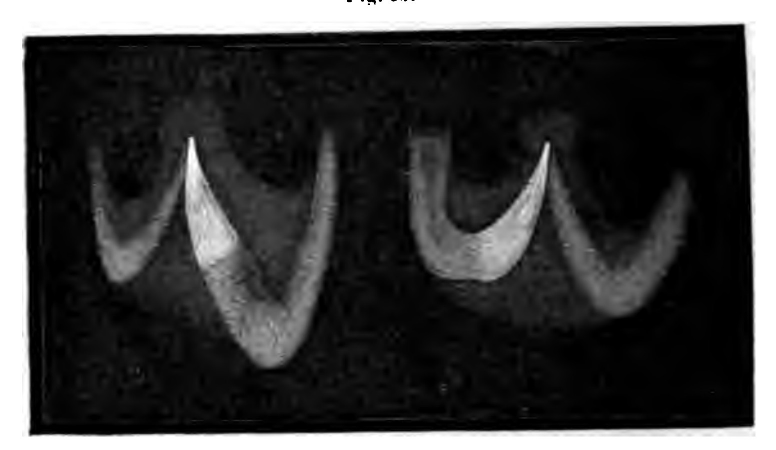
Bien que la chaleur solaire joue un rôle considérable dans la production de ces phénomènes, ils rentrent néanmoins dans le domaine de la Mécanique, et leur intérêt principal consiste en ce qu'ils nous révèlent, dans les espaces célestes, l'action d'une force complètement différente de l'attraction newtonienne.

Voici, en peu de mots, la succession des phénomènes. Lorsqu'on découvre une comète encore fort éloignée du Soleil (à la distance 3 ou 4), elle apparaît comme une tache ronde, d'un très faible éclat, en tout semblable à ces nombreuses nébuleuses télescopiques dont le ciel est parsemé. La figure ronde indique que les matériaux très rares dont l'atmosphère de la comète est constituée n'obéissent qu'à l'action du noyau; les couches de niveau dont l'astre est formé n'ont pas encore été déformées par l'action des forces extérieures. Il y a deux points à noter ici : 1° les plus petites étoiles se voient à travers cette nébulosité presque sans affaiblissement, malgré son énorme épaisseur; 2° elles n'y subissent aucune réfraction appréciable.

On vient d'assimiler cette nébulosité sphérique à une atmosphère : c'est qu'au bout de quelques jours on voit poindre en son centre un noyau brillant, lequel possède une masse et une densité énormément supérieures à celles de l'enveloppe nébuleuse. Mais, à mesure que la comète se rapproche du Soleil, des signes de déformation commencent à se montrer. Le noyau prend une position de plus en plus excentrique, en même temps que la figure de l'atmosphère s'allonge dans la direction du rayon vecteur. Enfin la comète se met à fuser; une queue se dessine à l'opposite du Soleil. Quand on parvient à mieux distinguer ce qui se passe autour du noyau, on voit que la comète fuse aux deux

bouts à la fois, par la formation d'une queue à l'opposé du Soleil, et, du côté de cet astre, par l'apparition d'aigrettes brillantes dont la matière marche d'abord vers le Soleil, puis s'arrête et finit par rebrousser chemin pour aller en arrière rejoindre les matériaux de la queue. Les deux figures suivantes de la tête de la comète de 1862 représentent cette aigrette le 22 et le 23 août (d'après le P. Secchi).

Fig. 35.



Ces phénomènes se passent sur une échelle gigantesque; il y a des queues de 20, 30, 40, 60 millions de lieues de longueur et plus, qui se forment ainsi à l'opposite du Soleil. Ces queues, tangentes à l'origine au rayon vecteur du noyau, sont recourbées en arrière, du côté d'où vient la comète. Leur éclat, assez vif près du noyau, va en diminuant vers l'extrémité; là il se perd pour ainsi dire dans le fond noir du ciel. La largeur de ces queues va aussi en augmentant vers l'extrémité. Enfin elles sont plates et contenues tout entières (sauf l'épaisseur) dans le plan de l'orbite, en sorte que, pour un observateur placé dans ce plan, ou à peu près, ces queues paraissent droites et minces.

Voici une figure de la grande comète de 1858 avec ses deux queues (comète de Donati).

Quant au noyau, seul point que les astronomes observent, il obéit à la loi de l'attraction newtonienne et décrit son orbite sans

raître sensiblement influencé par les phénomènes que nous
ions de décrire.

Fig. 36.



Examen des effets dus à la seule attraction.

Un corps, pris isolément, exerce autour de lui une attraction mitée qui maintient l'agrégation de ses matériaux propres avec utant plus d'énergie que sa masse est plus grande, et qui appelait vers lui toutes les molécules extérieures. Il n'en est plus si s'il se trouve à proximité d'un autre corps : l'action du preer, en la bornant aux régions où les points matériels tendent s lui, n'est plus indéfinie; elle a une limite au delà de laquelle résultante des attractions des deux corps n'est plus dirigée vers

lui, ou du moins à l'intérieur de sa sphère d'attraction, en sorte que les matériaux qui sont soumis à ces deux forces ne sont plus retenus par le corps considéré.

Le phénomène des marées est un cas très particulier de cette question. L'attraction du Soleil ou de la Lune tend à déformer, à allonger la surface des fluides qui recouvrent la Terre, dans le sens de la droite qui unit les deux astres. Si l'on diminuait progressivement, par la pensée, la masse de la Terre, cette déformation se prononcerait de plus en plus; la surface limite, en se rétrécissant, finirait par laisser en dehors d'elle une partie de l'enveloppe fluide, qui cesserait dès lors d'appartenir à la Terre.

On comprend donc que l'action d'une masse puissante, comme celle du Soleil, tende à décomposer les corps d'une masse très faible qui s'approchent de lui, surtout si ces corps occupent un volume considérable, sans cesse accru d'ailleurs par la chaleur croissante qu'ils reçoivent du Soleil.

Considérons maintenant une comète décrivant autour du Soleil une orbite parabolique. Tant qu'elle sera très loin du Soleil, la sphère d'attraction sera très étendue. L'action perturbatrice du Soleil n'étant que la différence de ses attractions sur la masse entière qu'on peut supposer réunie au centre du noyau, et sur les parties plus ou moins éloignées, cette force sera inversement proportionnelle au cube de la distance de l'astre et en raison directe du rayon de l'astre considéré. Elle augmentera donc très rapidement à mesure que ce dernier se rapprochera du Soleil. Alors certaines parties de cette comète, en avant et en arrière du noyau, cesseront de lui appartenir et s'en écarteront peu à peu sous forme d'aigrettes ou de secteurs lumineux; mais comme ces matériaux participaient à sa vitesse de translation, ils poursuivront leur marche dans la même orbite, à peu près, avec des vitesses peu différentes; leur écartement ira en augmentant; ils tendront à se disséminer tout du long de cette courbe. C'est là le phénomène auquel on attribue la dissolution progressive de certaines comètes et leur transformation en un essaim de plus en plus allongé de corpuscules. Quelques-uns de ces essaims coupent l'orbite de la Terre, viennent la heurter et s'enflamment dans son atmosphère.

Impossibilité d'expliquer les queues par la seule attraction.

Il n'entre là que le jeu ordinaire de l'attraction et il a été étudié aussi complètement que possible par M. Roche (voir les *Éléments de Mécanique céleste* de M. Resal, p. 263 et suiv.). Mais les comètes présentent en outre un phénomène entièrement différent, à savoir la formation de la queue qui se prolonge, non pas sur l'orbite, mais au dehors, dans le sens du rayon vecteur et à l'opposite du Soleil. Il y a là l'indication d'une force bien différente de l'attraction, car, on vient de le voir, les attractions combinées du Soleil et de la comète ne sauraient donner naissance à de tels phénomènes. Cette force, nécessairement émanée du Soleil, est répulsive.

Caractères de la force répulsive.

Quelle différence y a-t-il entre ce noyau qui tombe paraboliquement vers le Soleil, et ces nébulosités qui fuient au contraire le Soleil avec une rapidité si frappante? La voici : ces nébulosités sont d'une ténuité, d'une rareté inimaginables; le noyau, au contraire, est relativement très dense et renferme à lui seul presque toute la masse de la comète. La force répulsive que le Soleil exerce visiblement sur ces nébulosités n'est donc pas proportionnelle aux masses, mais aux surfaces. C'est une force analogue aux forces physiques de l'électricité et de la chaleur, aux actions mécaniques que le vent, l'eau, etc., produisent sur nous par impulsion. Elle ne s'exercera donc pas à travers toute matière, comme l'attraction, mais elle sera arrêtée par l'interposition d'un écran matériel quelconque. Elle ne se propagera pas instantanément comme l'attraction, mais successivement comme le vent, la lumière, l'électricité, la chaleur. Enfin elle n'imprimera pas la même accélération à toutes les particules de matière, comme l'attraction; son effet variera avec leur densité. Au lieu de faire mouvoir du même mouvement les corps massifs et les corps légers, elle les triera par ordre de densités et chassera plus loin les moins denses. Si, comme il est naturel de le penser, l'action de cette force varie en raison inverse du carré de la distance, son effet sur un corps sera dû à la simple différence entre elle et l'attraction, différence qui sera tantôt positive, vers le Soleil, ou négative à l'opposite,

suivant qu'elle sera moindre ou plus forte. L'orbite décrite sera donc une branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le Soleil dans le premier cas, et sa convexité dans le second (p. 120). Dans les deux cas, le Soleil sera au foyer.

Examinons maintenant les conséquences et voyons si elles s'accordent avec les faits. Soient A, B, C, D, E (*fig.* 37) les positions successives du noyau sur sa trajectoire autour du Soleil S. Une molécule, cessant en A de faire corps avec le noyau et placée en dehors de la sphère d'attraction est repoussée par le Soleil avec une force $H\theta - \mu$, H étant un coefficient relatif à la densité et à la figure des particules cométaires. En vertu de sa vitesse actuelle, égale à celle de la comète, et de cette force répulsive, elle décrira une trajectoire hyperbolique (nous négligeons l'attraction du noyau) Aa. La relation $V = \frac{C}{r\cos\psi}$ (p. 115), qui s'applique aux forces centrales quelconques, montre que l'aire décrite en un temps

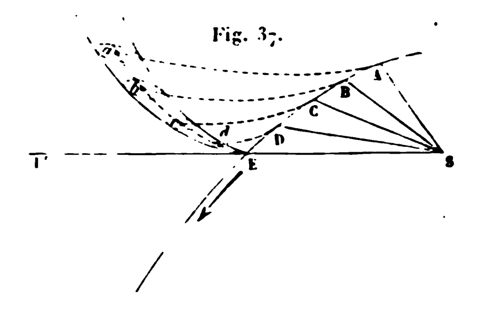


Fig. 37.

donné par le rayon vecteur de cette molécule sera la même que l'aire décrite par le rayon vecteur SA du noyau, car V, r et ψ sont les mêmes à l'origine, en A. Lorsque le noyau sera parvenu en E, la molécule considérée sera venue en a de manière que le secteur hyperbolique ASa soit équivalent au secteur parabolique ASE, et comme le point a se meut en dehors de la courbe AD, il se trouvera, à l'instant considéré, en arrière du rayon vecteur SE. Il en sera de même des molécules abandonnées par la comète en B, C, D, pourvu qu'on les prenne dans les mêmes circonstances de situation que la molécule a. Au moment où la comète sera en E, ces molécules se trouveront en b, c, d, ... toutes en arrière du rayon vecteur, et leur ensemble, à cet instant, dessinera une ligne E$dcba$ dont

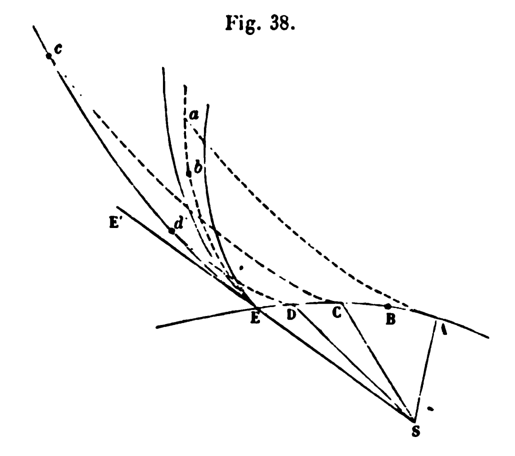
la convexité fera face à la région vers laquelle se meut la comète.

Si le point D était infiniment rapproché du point E, les aires triangulaires SDd, SDE étant égales, l'élément de courbe Ed devra être parallèle à SD, et, comme l'angle DSE est supposé infiniment petit, la courbe de la queue sera tangente, à l'origine, au rayon vecteur SE.

Si, au lieu d'une molécule, on considère l'ensemble de celles qui quittent le noyau en A, cet ensemble voyagera sur des trajectoires très voisines de Aa, les premières se séparant de plus en plus de celles qui sont en arrière; cette sorte de bouffée de nébulosités s'allongera de plus en plus et viendra occuper en a un espace beaucoup plus grand qu'en A, surtout dans le sens de la marche. Cette bouffée ira donc en se raréfiant, en diminuant d'éclat, et finira bientôt par disparaître à nos yeux. Ainsi la queue d'une comète, enveloppe des positions de toutes ces bouffées successivement enlevées de la tête, doit aller en s'élargissant et en s'affaiblissant à partir du noyau.

Si parmi les molécules émises en A, B, C, D, ..., il s'en trouve de densités différentes, les plus légères, plus vivement repoussées que les autres, décriront des hyperboles plus caractérisées avec une accélération plus rapide. Un triage aura donc lieu; les plus

Fig. 38.



légères, les moins lumineuses par conséquent, puisqu'elles ne se voient que par la lumière qu'elles réfléchissent, iront former, entre le rayon vecteur SEE' et la première queue, une seconde queue

E $d'c'$ moins recourbée et moins brillante que la première E*dcba*. Celle-ci sera également tangente à l'origine au rayon vecteur. On retrouve sur le dessin de la comète de Donati (p. 189) toutes les circonstances que nous venons de décrire.

Explication proposée par Newton.

Newton a donné, dans le livre des *Principes,* une théorie analogue; mais il y a mêlé une hypothèse dont il importe de signaler le défaut. Considérant sans doute comme anti-philosophique de faire intervenir dans les phénomènes célestes une autre force que l'attraction, il attribue la répulsion que subissent les matériaux des comètes à l'action d'une vaste atmosphère dont le Soleil serait entouré. Les nébulosités cométaires s'y élèveraient sous l'influence de la chaleur solaire, comme la fumée qui monte dans notre air, non par une répulsion réelle, mais en vertu de la poussée produite par l'air plus pesant qui se trouve déplacé. Il y a là une erreur presque évidente que Laplace a signalée. L'atmosphère du Soleil tourne nécessairement avec cet astre, de même que l'atmosphère terrestre tourne avec la Terre; dès lors elle ne saurait dépasser le point où la force centrifuge, née de la rotation, ferait équilibre à l'attraction. Cette limite est bien plus rapprochée du Soleil que l'orbite de Mercure. Quant à l'éther des physiciens, il est impondérable; par conséquent il ne pèse pas sur le Soleil et ne pourrait donner lieu par son propre poids, puisqu'il n'en a pas, à l'ascension de matériaux moins denses que lui. S'il était pondérable, ses diverses parties devraient circuler, d'une manière ou d'une autre, suivant les lois de Kepler; elles ne presseraient donc pas davantage sur le Soleil.

Introduction de la force répulsive dans les équations différentielles du mouvement.

Il s'agit ici de la trajectoire de la comète : dans ce cas la répulsion est excessivement faible et ne saurait exercer qu'une simple action perturbatrice, à cause de la densité relativement forte du noyau.

Voici la comparaison des caractères des deux forces visiblement exercées par le Soleil.

ATTRACTION.	RÉPULSION.
Elle est proportionnelle aux masses.	Elle est proportionnelle aux surfaces.
Elle agit à travers toute matière sans extinction.	Elle est affaiblie ou interceptée par toute matière interposée.
Elle se propage instantanément.	Elle se propage successivement, comme les autres forces physiques.
Elle varie en raison inverse du carré des distances.	Elle varie très probablement en raison inverse du carré des distances.

Soit W sa vitesse de propagation ; si elle marche aussi vite que la chaleur et la lumière, on aura

$$W = 10091\sqrt{\mu} \quad \text{(p. 265).}$$

Représentons par H un coefficient dépendant de la figure et de la densité du mobile (comme dans la théorie de la résistance d'un milieu), par V la vitesse tangentielle de ce dernier à la distance r. $\frac{HW}{r^2}$, $\frac{HV}{r^2}$ seront les composantes de cette force estimée suivant le rayon vecteur et la tangente à l'orbite. On aura donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{HW}{r^2}\right)\frac{x}{r} + \frac{HV}{r^2}\frac{dx}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{HW}{r^2}\right)\frac{y}{r} + \frac{HV}{r^2}\frac{dy}{ds},$$

ou bien, en posant $\mu' = \mu - HW$, $V = \frac{ds}{dt}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu' x}{r^3} + \frac{H}{r^2}\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu' y}{r^3} + \frac{H}{r^2}\frac{dy}{dt}.$$

Si l'on intègre ces équations, comme l'a fait M. Plana, par la théorie de la variation des constantes arbitraires, en y appliquant les formules du Chapitre VII de la *Mécanique céleste* (¹), on trouve, pour les variations séculaires et périodiques des élé-

(¹) *Mémoires de l'Académie de Turin*, série II, t. XXI. Évidemment cette analyse ne s'applique pas aux trajectoires hyperboliques des matériaux de la queue.

ments, les expressions suivantes, où $H' = \frac{H}{\sqrt{\mu}}$:

$$\partial a = -\frac{2H'a(1+e^2)}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\mathcal{L} - \frac{4H'ae}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\sin(\mathcal{L}-\varpi),$$

$$\partial e = -\frac{2H'e}{\sqrt{a(1-e^2)}}\mathcal{L} - \frac{2H'}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\mathcal{L}-\varpi),$$

$$e\,\partial\varpi = \quad \ldots\ldots\ldots \quad + \frac{2H'}{\sqrt{a(1-e^2)}}\cos(\mathcal{L}-\varpi).$$

Comme $n^2a^3 = \mu'$, on aura

$$\partial n = +\frac{3H'n(1+e^2)}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\mathcal{L} + \frac{6H'en}{\sqrt{a(1-e^2)^3}}\sin(\mathcal{L}-\varpi).$$

On voit que tous les éléments, sauf i et N, sont affectés d'inégalités dont la période est la durée de la révolution. Seuls le grand axe et l'excentricité présentent en outre des inégalités séculaires. L'accélération du moyen mouvement doit être, toutes choses égales d'ailleurs, bien plus marquée que dans la théorie des milieux résistants pour les comètes dont l'orbite est très excentrique. Par exemple, le seul facteur $(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}$ commun aux deux théories est 4650 fois plus grand pour la comète de 1843 et de 1880 que pour celle d'Encke. La cause dont il s'agit pourrait parfaitement produire l'accélération exceptionnelle que quelques Astronomes soupçonnent dans le mouvement de la première comète.

La répulsion paraît être due à l'incandescence du Soleil.

« J'ai expliqué jusqu'ici, dit Newton à la fin du livre des *Principes*, les phénomènes célestes et ceux de la mer par la force de la gravitation, mais je n'en ai assigné nulle part la cause. Cette force vient de quelque cause qui pénètre jusqu'au centre du Soleil et des planètes sans rien perdre de son activité; elle n'agit pas selon la grandeur des superficies, comme les causes mécaniques, mais selon la quantité de matière, et son action s'étend de toute part à des espaces immenses, en décroissant toujours dans la raison doublée des distances. » Ici, au contraire, il s'agit d'une de ces causes mécaniques qui agissent selon la grandeur des superficies. Est-ce l'électricité?

Olbers et Bessel ont adopté cette hypothèse parce qu'ils ont cru voir, dans la formation des aigrettes de la tête (*fig.* 35), l'indice d'une répulsion électrique propre au noyau. Il est facile de voir que c'est une simple conséquence de la force décomposante exercée par l'attraction solaire sur les matériaux du noyau dilatés par la chaleur.

D'ailleurs l'état électrique ou magnétique de ces astres nous est inconnu. Mais ce que nous savons, c'est, d'une part, que le Soleil est dans un état de vive incandescence, d'autre part que la chaleur n'est pas une force polaire, mais une force simple se manifestant uniquement par des répulsions de molécule à molécule dans l'intérieur des corps. Si donc ces répulsions, que tout écran matériel doit affaiblir ou intercepter, ne s'annulent pas à toute distance finie (proposition difficilement contestable), l'immense photosphère incandescente du Soleil peut fort bien agir d'une manière sensible, malgré la distance, sur les corps à grande superficie et presque sans masse, tels que les nébulosités cométaires. J'ai fait à ce sujet des expériences qui m'ont paru confirmer cette manière de voir, mais ce n'est pas ici le lieu de les exposer.

Quant au rôle astronomique de cette force répulsive qui doit s'exercer aussi bien sur les planètes que sur les comètes, les équations de la page 194 montrent qu'il se réduit à produire (comme la résistance d'un milieu *immobile*) une petite accélération des moyens mouvements et une faible diminution des excentricités. Il a été jusqu'ici complètement inappréciable en dehors des comètes, et cela s'explique par l'énormité de la densité des planètes et de leurs satellites, vis-à-vis de celle des nébulosités cométaires.

En résumé, une comète subit, à la fois, deux genres de décomposition mécanique lorsqu'elle vient à passer au périhélie. Le premier, par la seule influence de l'attraction solaire, dissémine sur l'orbite du noyau des matériaux de toute densité, et donne ainsi lieu, pour les comètes qui passent près de l'orbite de la Terre, au phénomène des étoiles filantes, des bolides et des aérolithes. Le second, par l'action répulsive du Soleil, chasse bien loin de l'orbite les matériaux les plus légers et forme les queues opposées au Soleil.

C'est d'ailleurs la chaleur solaire qui, sous des pressions excessivement faibles ou nulles, réduit progressivement les matériaux évaporables à l'état de nébulosités impalpables donnant prise à la force répulsive du Soleil.

CHAPITRE XXI.

RECHERCHE D'ASTRES INCONNUS.

Procédés de recherche pour les comètes.

La recherche des comètes est une occupation attachante et souvent fructueuse. Il faut se familiariser avec les constellations et les principales étoiles. Tout l'attirail instrumental consiste en une carte du ciel et une lunette de nuit qu'on tient à la main. Celle-ci ne diffère des lunettes ordinaires que par un oculaire négatif destiné à agrandir le champ et à donner beaucoup de lumière. Quant à la petite carte du ciel, il faut y marquer soi-même les principales nébuleuses, visibles dans ce chercheur, car on risque de les prendre pour des comètes lointaines. Si l'on vient à rencontrer dans le champ du chercheur une tache nébuleuse non inscrite sur la carte, on en fixe immédiatement la position par des alignements, puis à l'équatorial, et, après avoir constaté que l'astre se déplace par rapport aux étoiles, on annonce la découverte par la voie des journaux. Tout le monde ne dispose pas d'un observatoire, mais chacun peut faire monter une lunette sur un pied en bois, placer à son foyer un micromètre circulaire, c'est-à-dire une plaque de verre sur laquelle on fait tracer au diamant des cercles concentriques. Avec cet instrument, qui n'a pas besoin de monture parallactique, une montre de poche à secondes et un catalogue d'étoiles, on est en état de faire des observations bien préférables à de simples alignements. Plus d'un astronome célèbre a commencé ainsi.

Petites planètes entre Mars et Jupiter.

La recherche des petites planètes est plus minutieuse. Il faut un équatorial et des cartes célestes contenant toutes les étoiles jusqu'à

la 10e grandeur. On passe en revue successivement les étoiles contenues dans la zone zodiacale (quant aux comètes, elles peuvent se présenter partout), et l'on s'arrête lorsqu'on rencontre, dans les groupes examinés, une étoile non inscrite sur les cartes. Elle a été jusqu'ici bien fructueuse, car on a trouvé 227 petites planètes entre les orbites de Mars et de Jupiter, et rien n'annonce que la série de ces intéressantes découvertes soit épuisée.

La première trouvée a été Cérès, découverte par Piazzi le 1er janvier 1801.

Quel que soit l'intérêt de ces petits astres dont on commence à tirer parti pour la détermination de la parallaxe du Soleil, la découverte d'une grande planète comme Uranus est bien autrement importante. W. Herschel la découvrit, en 1781, en faisant une revue des étoiles de toutes les grandeurs jusqu'à la 8e, à l'aide d'un télescope assez puissant. Il s'agissait de faire un dénombrement exact des étoiles doubles. Son attention se fixa sur cette planète lointaine, à cause de son aspect fort différent de celui d'une étoile. Uranus se montre en effet comme un très petit disque de lumière pâle, et non comme un point de lumière vive. On s'attendait peu, à cette époque, à voir le système solaire s'enrichir d'une planète de plus; aussi la prit-on d'abord pour une comète.

Planètes intra-mercurielles.

Certaines taches d'aspect planétaire qu'on a vues, à diverses époques, sur le Soleil ont fait penser qu'il pourrait bien exister une ou plusieurs planètes entre cet astre et l'orbite de Mercure. Le Verrier a donné de l'importance à ce genre de recherches en affirmant que la théorie ne rendait pas un compte rigoureux de certaines inégalités observées dans les mouvements de Mercure. Mais, pour chercher les planètes intra-mercurielles, on en est réduit à attendre leurs problématiques passages sur le Soleil, ou bien les éclipses totales pendant la courte durée desquelles l'atmosphère cesse de jeter sur les environs de Soleil un voile lumineux fort gênant. Jusqu'ici ces deux moyens de recherche n'ont abouti à aucun résultat. Le second va être appliqué pendant l'éclipse totale de mai 1883, par ordre du Bureau des Longitudes.

Satellite de Sirius.

Il y a une dernière manière de chercher un astre inconnu lorsque son existence s'est décelée par quelque irrégularité qu'il aura causée dans la marche d'un astre connu : c'est le calcul. Bessel, ayant découvert une certaine loi dans les faibles écarts du mouvement propre de Sirius, n'hésita pas à les attribuer à l'action d'un satellite non encore observé, d'une petite étoile voisine, jusqu'alors effacée dans le rayonnement intense de l'étoile principale. Les prévisions du célèbre astronome de Kœnigsberg se sont pleinement vérifiées. Sur ces petites inégalités, MM. Peters et Auwers calculèrent l'orbite du satellite qui devait les causer. Longtemps après, un habile opticien des États-Unis, en essayant une lunette de 15 pouces d'ouverture à l'objectif, découvrit du premier coup, en 1862, l'astre perturbateur, le compagnon de Sirius annoncé par Bessel et calculé par ses élèves, mais resté invisible pour leurs trop faibles lunettes. Il se trouvait juste dans la direction donnée par les éléments de son orbite.

Découverte de Neptune.

L'exemple le plus brillant d'une découverte de ce genre est celle de Neptune. En compulsant les anciennes observations, on avait reconnu que la planète Uranus, découverte en 1781 par Herschel, avait été observée plusieurs fois à partir de 1690 par des astronomes qui l'avaient prise pour une simple étoile de 6ᵉ grandeur. On possédait donc, au commencement de ce siècle, plus de cent années d'observations de cette planète, dont la révolution est de quatre-vingt-quatre ans. Laplace en fit la théorie. Bouvard en calcula les Tables; mais il rencontra ici un obstacle qu'aucune autre planète ne lui avait opposé. Les observations du XVIIIᵉ siècle ne cadraient pas avec celles du XIXᵉ; impossible de les représenter toutes par une même orbite. Bouvard attribua cette difficulté, non à quelque défaut de la loi d'attraction qui deviendrait sensible à une grande distance du Soleil, mais à l'action d'une planète inconnue qui circulerait bien au delà de l'orbite d'Uranus. En attendant une recherche alors impossible, faute de données suffisantes, il se résigna à sacrifier les anciennes

observations et à baser ses Tables sur les plus récentes. Mais la planète ne se plia pas à ses calculs; les Tables de Bouvard, publiées en 1821, se trouvèrent bientôt en désaccord avec les positions observées d'Uranus; l'erreur était déjà de 128″ en 1840.

Était-il possible de découvrir par le calcul la position de l'astre perturbateur? Les écarts ne tenaient pas seulement à son action, mais aussi aux erreurs des éléments assignés à Uranus, éléments calculés sur des observations nécessairement viciées par des perturbations dont on n'avait pu tenir compte. La question était donc de déduire de ces écarts, de nature si complexe : 1° les corrections des six éléments de l'orbite d'Uranus, 2° les six éléments de la planète inconnue et sa masse.

Cette question serait même insoluble si l'on ne se donnait pas, *a priori*, par une sorte de divination, la distance de la planète cherchée au Soleil. Par la loi de Bode (p. 98) on trouvait 39, à peu près le double de la distance d'Uranus; de plus tout portait à croire que l'inclinaison de son orbite sur celle d'Uranus était négligeable. Cherchons à nous rendre compte de ce singulier problème, dont le caractère, si mal déterminé, était bien peu encourageant.

Première idée du problème.

Uranus ne se rapproche évidemment de la planète inconnue qu'à de très longs intervalles; à en juger par la distance hypothétique 38 ou 39, la période de leurs conjonctions devait embrasser au moins un siècle et demi. Or l'action perturbatrice n'étant un peu marquée que pendant un demi-siècle au plus, vers l'époque d'une conjonction, elle est négligeable partout ailleurs, pendant un siècle au moins, à cause des énormes distances, 39 et 58, qui séparent alors la planète inconnue du Soleil et d'Uranus. Il aurait donc fallu, en 1840, faire deux parts des observations existantes et chercher à les représenter isolément. On aurait trouvé ainsi qu'une même orbite satisferait à toutes les observations anciennes, de 1690 à 1800, tandis qu'elle n'aurait même pas pu représenter passablement les suivantes. Par conséquent la planète cherchée devait se trouver, pendant la première période, trop éloignée pour exercer une action bien sensible. Or, en comparant la première orbite, satisfaisant à

près d'un siècle d'observations, avec les observations nouvelles (celles du XIX[e] siècle), on aurait eu sous les yeux, par les écarts obtenus, la marche des perturbations spéciales d'Uranus, et constaté un maximum vers 1822. Il est facile de voir que ce maximum doit correspondre à l'époque de la conjonction des deux planètes vues du Soleil.

En effet, si on décompose l'action perturbatrice (différence des attractions exercées sur Uranus et le Soleil) suivant la tangente et le rayon vecteur, on voit que la première composante agit dans un sens avant la conjonction, et dans le sens opposé, avec la même intensité, après cette époque. Ses effets finissent donc par se détruire après avoir produit un maximum d'écart en 1822. Quant à l'autre composante, celle du rayon vecteur, elle ne s'annule pas, mais elle n'affecte point la vitesse aréolaire; elle n'altère que le demi-paramètre de l'orbite d'Uranus, car dans la relation $C^2 = p\mu$, où le facteur μ se trouve altéré, le produit $p\mu$ doit rester constant. Cette action, d'abord peu sensible, s'étendra à la révolution suivante d'Uranus, laquelle s'accomplira avec des éléments elliptiques sensiblement modifiés.

Cela posé, si la conjonction des deux planètes a eu lieu en 1822, comme Uranus avait alors 275° de longitude héliocentrique, la planète inconnue devait se trouver aussi par 275° de longitude. En ajoutant 48° pour le chemin parcouru par cette dernière, de 1822 à 1846, on avait 323° au moment où l'on s'est mis à la chercher. On l'a trouvée par 327°.

Travaux de M. Adams.

Ce n'est pas par de semblables tâtonnements que le problème fut abordé pour la première fois, en 1843, par M. Adams, mais d'une manière bien plus scientifique et plus efficace. Si l'on désigne par $\partial\mathcal{L}_0$, ∂n, ∂e, $\partial\varpi$ les corrections à ajouter aux éléments elliptiques des Tables de Bouvard pour Uranus, on a (p. 94)

$$\partial\mathcal{L}_0 + t\,\partial n - 2\cos(\mathcal{L}_0 + nt - \varpi)e\,\partial\varpi + 2\sin(\mathcal{L}_0 + nt - \varpi)\partial e$$

pour représenter les écarts des observations, en tant qu'ils ne dépendent que des erreurs des éléments.

D'autre part, les perturbations causées par une planète deux fois plus éloignée qu'Uranus, et ayant pour éléments $\mathfrak{L}'_0, n', a', \frac{e'}{20}, \varpi'$ et une masse $\frac{m'}{5000}$ exprimée au moyen de l'indéterminée m', s'obtiennent aisément par la marche habituelle, si bien tracée dans la *Mécanique céleste*. M. Adams a trouvé ainsi (¹) :

$$\begin{aligned}
&- 37'' m' \sin(\mathfrak{L}_0 + nt - \mathfrak{L}'_0 - n't),\\
&+ 59\ m' \sin 2(\mathfrak{L}_0 + nt - \mathfrak{L}'_0 - n't),\\
&+ 31\ m' \sin[\mathfrak{L}_0 + nt - 2(\mathfrak{L}'_0 + n't) + \varpi],\\
&- 93\ m' \sin[2(\mathfrak{L}_0 + nt) - 3(\mathfrak{L}'_0 + n't) + \varpi],\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il a ajouté ces termes aux différentielles précédentes, égalé leur somme aux écarts constatés et formé des équations de condition entre les neuf inconnues. En profitant habilement d'une circonstance qui permettait de traiter à part les corrections de l'orbite d'Uranus, M. Adams a obtenu, en 1845, les éléments de la planète perturbatrice : avec l'hypothèse $a' = 2a = 39$,

Époque..................................	6 octobre 1846,
Longitude moyenne de l'époque...........	$\mathfrak{L}'_0 = 325°7'$
Longitude du périhélie..................	$\varpi' = 315°57'$
Excentricité............................	$e' = 0,161$
Masse...................................	$\frac{1}{6000}$

et pour les corrections des Tables de Bouvard :

$$\begin{aligned}
\partial\mathfrak{L}_0 &= -50'',\\
\frac{\partial a}{a} &= 0,00001,\\
\partial e &= 21'',\\
e\,\partial\varpi &= 127''.
\end{aligned}$$

A titre de vérification indispensable, le jeune géomètre s'était assuré qu'en appliquant ces corrections aux Tables, le désaccord

(¹) Comparer avec les perturbations de la Terre, p. 133.

entre ces Tables et les observations d'Uranus disparaissait à peu près complètement.

M. Adams communiqua ces résultats à quelques astronomes anglais. L'un d'eux consentit bien à chercher la planète annoncée, mais, par défiance sans doute, on ajourna la publication du Mémoire de M. Adams à l'époque où l'on aurait trouvé la planète d'après ses indications, et l'on se crut obligé d'étendre ces recherches bien au delà du point assigné par le calcul, ce qui devait en retarder beaucoup le succès.

Travaux de Le Verrier.

Heureusement Le Verrier, sur le conseil d'Arago, entreprit de son côté la même recherche, sans connaître les résultats obtenus en Angleterre, et publia les siens, en juin 1846, avec une confiance qui produisit une impression profonde. M. Galle, à Berlin, était depuis quelque temps en possession d'une carte très détaillée de la région céleste où devait se trouver Neptune. Invité par Le Verrier à la chercher par 326° de longitude, il la trouva immédiatement par 326°53'. L'erreur du calcul n'atteignait pas 1°. Les éléments publiés d'avance par Le Verrier étaient les suivants.

En supposant $a' = 36,154$:

Époque	1er janvier 1847
Longitude moyenne	$\zeta'_0 = 218° 47',4$
Longitude du périhélie	$\varpi' = 284° 45',8$
Excentricité	$e' = 0,10761$
Masse	$\frac{1}{9300}$
Durée de la révolution	$217^{\text{ans}},387$

Cette magnifique découverte amena les astronomes anglais à déclarer qu'ils avaient entre les mains, depuis une année entière, les éléments calculés par M. Adams, assignant la même longitude à peu près à l'astre inconnu.

Il y eut cependant une sorte de désappointement lorsqu'on connut la véritable orbite de la planète nouvelle. En voici les éléments, d'après M. Peirce :

Époque	1er janvier 1847
Demi-grand axe	30,067
Longitude de l'époque	328°32′44″
Longitude du périhélie	47°12′7″
Excentricité	0,00872
Masse	$\frac{1}{24000}$
Durée de la révolution	164^ans^,62

Ils différaient tellement de ceux de M. Adams ou de Le Verrier qu'il sembla que M. Galle avait découvert un astre tout différent de celui dont on avait cru pouvoir assigner l'orbite par le calcul. Ces doutes n'étaient pas fondés; mais il faut reconnaître que les deux savants géomètres s'étaient un peu exagéré la portée de leur analyse. Procédant par des hypothèses tout à fait gratuites sur la distance, ils ne devaient réellement aboutir qu'à assigner à peu près la longitude de la planète cherchée, vers l'époque de sa plus grande action sur la marche d'Uranus, et non ses véritables éléments. Au fond, c'était tout ce qu'il fallait pour la découvrir.

Conséquences de cette découverte.

Elle a fait disparaître les seuls écarts notables que la théorie rencontrât alors avec l'observation. Elle a presque doublé l'étendue du système solaire déjà si élargi par la découverte d'Uranus. Par la découverte du satellite de Neptune (due à M. Lassell), nous avons appris que le monde solaire se divise en deux parts. Dans la première, la plus voisine du Soleil, les rotations des planètes et les circulations des satellites sont toutes directes. Dans la deuxième, elles sont toutes rétrogrades.

LIVRE V.

PARALLAXE DU SOLEIL, PRÉCESSION, NUTATION ET ABERRATION.

Ce Livre comprend la mesure de la distance de la Terre au Soleil, d'où l'on conclut les dimensions absolues du système solaire, et l'étude des variations que subissent avec le temps les coordonnées des astres, par le seul effet des déplacements progressifs ou périodiques auxquels sont soumis les axes des coordonnées. Comme la lumière ne se propage pas instantanément, il en résulte encore qu'aucun point de l'univers n'est vu à sa vraie place par un observateur en mouvement. De là des variations, purement apparentes, qu'il faut défalquer des observations. Nous aboutissons ainsi au système complet des corrections qu'il faut appliquer aux positions apparentes des astres avant d'en pouvoir tirer parti pour l'étude de leurs mouvements propres.

CHAPITRE XXII.

DIMENSIONS ABSOLUES DU SYSTÈME SOLAIRE. PARALLAXE DU SOLEIL.

Nous connaissons les dimensions et la masse m de la Terre; les opérations géodésiques nous ont donné les éléments des formules

$$m = \frac{P}{G},$$
$$P = \tfrac{4}{3}\pi(\rho)^3 10^3 (1-\mu) D,$$

P étant exprimé en kilogrammes.

Ces éléments sont (t. I, p. 298 et 332, t. II, p. 239)

$$(\rho) = 6378393^{m},$$
$$\mu = \tfrac{1}{292},$$
$$D = 5,6,$$
$$G = 9^{m},7981.$$

Mais, en Astronomie, nous avons pris pour unités le demi-grand axe a de l'orbite terrestre et la masse M du Soleil. Pour exprimer les distances célestes et les masses en unités courantes, il faut donc déterminer les quantités qui entrent dans les formules

$$\frac{(\rho)}{a} = \sin(\pi),$$
$$\frac{m}{M} = \frac{GT^2}{4\pi^2(\rho)} \sin^3(\pi), \text{ (voir p. 141)},$$

et, comme (ρ), G, T sont parfaitement connus, il ne reste plus qu'à s'occuper de (π), parallaxe du Soleil. On voit que l'erreur relative qui pourra affecter (π) se reportera en entier sur l'unité a et sur toutes les dimensions linéaires de notre système; elle sera triplée pour toutes les masses, parce que (π) y figure au cube.

Mesure directe de la parallaxe du Soleil.

Pour déterminer la distance d'un point inaccessible M, les arpenteurs mesurent une base AB et les angles à la base du triangle ABM. On obtient l'angle en M par $180^\circ - (A + B)$; la distance AM se calcule ensuite par

$$AM = AB \frac{\sin B}{\sin M}.$$

L'erreur probable a pour expression

$$\frac{\partial AM}{AM} = \pm\sqrt{\left(\frac{dAB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\tan B}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\tan M}\right)^2}.$$

Le triangle est donc défavorable quand l'angle M est trop petit. C'est le cas où se trouvent toujours les Astronomes. Comme, dans leurs opérations, la base est parfaitement connue et les angles A et B presque droits, la formule ci-dessus se réduit à

$$\frac{\partial AM}{AM} = \frac{\partial M}{M}.$$

La plus grande base que nous fournisse le globe terrestre est $2(\rho)$. Même avec cette base, le triangle ayant le Soleil à son sommet donnerait $M = 17''$ environ. Les angles A et B ne pourraient, certes, pas être mesurés à la seconde; la valeur de M conclue serait donc affectée d'une erreur absolue de plus de $1''\sqrt{2} = 1'',4$. L'erreur relative de la distance serait supérieure à $\frac{1,4}{17}$, ou de $\frac{1}{12}$. Les distances absolues seraient donc connues à $\frac{1}{12}$ près tout au plus, et les masses à $\frac{1}{4}$. On sait, au contraire, avec quelle précision ces distances et ces masses sont déterminées quand on les exprime en unités astronomiques.

Ainsi l'angle en M est trop petit; la distance du Soleil est trop grande pour pouvoir être mesurée ainsi. Mais, précisément parce que les rapports de toutes les distances à celle-ci sont parfaitement connus, on n'aura qu'à substituer, à celle du Soleil, celle d'une planète très rapprochée de nous.

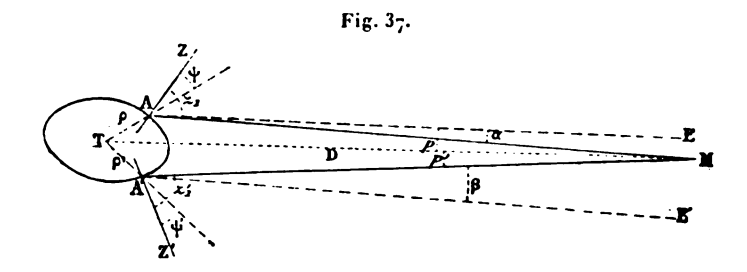
Parallaxe de Mars.

Le demi-grand axe de l'orbite de cette planète est 1,52; son excentricité est de 0,093; la plus grande distance du Soleil à la Terre est de 1,017. Par conséquent, si l'on observe Mars en opposition lorsqu'il est au périhélie et la Terre à son aphélie, sa distance à la Terre sera 0,362, en sorte que l'angle en M sera trois fois plus grand que dans le triangle précédent.

Il y a plus, par un artifice particulier aux astronomes, on mesure cet angle directement, tout comme si l'observateur se trouvait en M, et cela avec une précision décuple. On peut ainsi espérer obtenir la parallaxe du Soleil, par l'observation de Mars, avec une certaine exactitude.

Choisissons, sur un même méridien terrestre, deux stations A. A aussi éloignées que possible l'une de l'autre, et plaçons-y deux observateurs. Au moment où la planète Mars passera par le méridien céleste des deux stations, chaque observateur mesurera micrométriquement, dans le champ même de sa lunette, la différence

Fig. 37.



de distance polaire entre Mars et quelque petite étoile très voisine dont le choix aura été convenu d'avance. Désignons par z_1, z'_1 les distances zénithales (non affectées de la réfraction) de la planète, distances qu'on n'aura même pas besoin d'observer et qu'on tirera d'une éphéméride; par ψ ou ψ' l'angle compris, en chaque station, entre le rayon terrestre TA et la verticale AZ. Les corrections de parallaxe p, p', c'est-à-dire les angles AMT, A'MT, seront

$$p = \frac{\rho}{D}\sin(z_1 - \psi), \quad p' = \frac{\rho'}{D}\sin(z'_1 - \psi'),$$

formules où nous omettons d'écrire le facteur 206265″. Désignons, d'autre part, par α et β les petits angles mesurés micrométriquement aux deux stations entre Mars et l'étoile E, c'est-à-dire entre le rayon visuel AM et la direction AE dans laquelle apparaît l'étoile E. Comme les deux directions AE, A′E′ sont parallèles, on aura

$$M = \alpha + \beta = p + p';$$

par conséquent

$$\alpha + \beta = [\rho \sin(z_1 - \psi) + \rho' \sin(z'_1 - \psi')] \frac{1}{D}.$$

Cette formule donnera D, distance de la planète au centre de la Terre, en parties de l'unité linéaire qui sert à exprimer ρ et ρ', c'est-à-dire du rayon équatorial (ρ) de la Terre.

Sans doute on obtiendrait aussi M par la relation

$$M + 180^\circ - (z_1 - \psi) + 180 - (z'_1 - \psi') + \lambda' - \lambda = 360^\circ;$$

mais alors on s'exposerait aux erreurs qui affectent les distances zénithales, erreurs provenant de la graduation des cercles, de la flexion des instruments, de la réfraction, etc. Ces erreurs disparaissent dans les mesures différentielles de α et β, parce qu'elles affectent également les deux astres.

Si les deux stations n'étaient pas exactement sur le même méridien (elles doivent être choisies sur les deux hémisphères), il s'écoulerait un temps t entre la mesure de α et celle de β. Dans cet intervalle, la distance polaire varierait de $\frac{d\delta}{dt}t$, quantité qu'on tire fort exactement des éphémérides de la planète; on l'ajoute à la distance mesurée α pour la ramener à l'instant où β a été obtenu dans la deuxième station.

Par de nombreuses observations faites simultanément sur les deux hémisphères, on a obtenu la valeur numérique de $206265'' \frac{(\rho)}{D}$, c'est-à-dire la parallaxe de Mars à la distance D, au moyen de triangles où l'angle au sommet était de 40″ à 50″. Cette distance D étant bien connue par les Tables de Mars, en parties de a, on en a conclu

$$206265'' \frac{(\rho)}{a} = 8'',85$$

pour la parallaxe horizontale du Soleil. C'est une première détermination astronomique de cet élément capital. La méthode est due à D. Cassini et a été appliquée, en 1671, par les astronomes français. Ce sont eux qui ont effectivement mesuré, pour la première fois, la distance de la Terre au Soleil. Leur résultat, 9″,5, était un peu trop fort; cela tient en partie à l'insuffisance de la base Cayenne-Paris sur laquelle ils ont opéré.

Parallaxe de Vénus.

Vénus, en conjonction avec le Soleil, se projette parfois sur cet astre. Le rayon de son orbite presque circulaire étant 0,723, sa distance à la Terre est, à l'époque de ses passages sur le Soleil, de $1 - 0{,}723 = 0{,}277$. En outre, la circonstance que Vénus se projette sur le Soleil comme une tache noire parfaitement ronde semble être de nature à faciliter les mesures. Donnons d'abord une première idée de ces phénomènes célèbres, auxquels s'intéressent en ce moment toutes les nations civilisées.

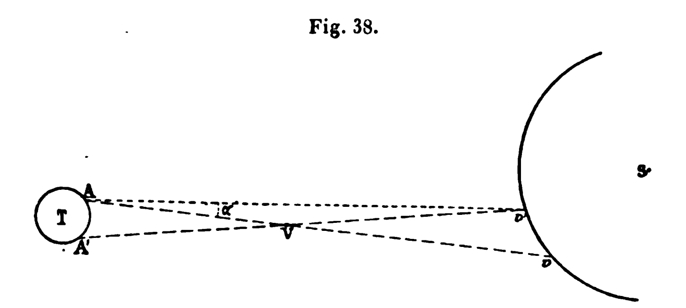
A cause de l'inclinaison du plan de l'orbite de Vénus sur l'écliptique, cette planète ne se projette pas sur le Soleil toutes les fois qu'elle est en conjonction interne avec lui : il faut encore qu'à l'époque d'une conjonction la planète soit voisine de l'un de ses nœuds. Cette coïncidence arrive à peu près deux fois par siècle, à huit ans d'intervalle. Voici les dates de quelques-uns de ces phénomènes :

1631	7 déc.....	Passage prédit par Kepler.
1639	4 déc.....	Non observé
1761	5 juin....	Observés par des astronomes de tous les pays
1769	3 juin....	
1874	9 déc.....	Observé par des astronomes de tous les pays.
1882	6 déc.....	Sera observé incessamment.
2004	8 juin....	
2012	6 juin....	

Deux observateurs, postés en deux stations très éloignées A et A′ sur les deux hémisphères, voient au même instant la planète V se projeter sur le Soleil, l'un en v, l'autre en v'. Évidemment, le déplacement vv' est un effet de parallaxe, et le Soleil joue ici le même rôle que l'étoile à laquelle nous avons comparé Mars. Seulement,

comme il n'est pas à l'infini, il a lui-même une petite parallaxe qui, pour le point v', sera $Av'A'$. En d'autres termes, de Vénus, on voit la base AA' sous l'angle V, et du Soleil, en v', on la voit

Fig. 38.

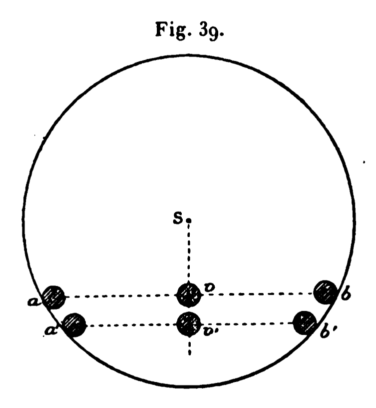


sous l'angle v'. La différence est $v'Av$, distance angulaire des deux points v et v' sur lesquels Vénus se projette sur le Soleil. La proportion, dont les Tables donnent le second membre,

$$\frac{\sin v'}{\sin v' A v} = \frac{AV}{Vv'}$$

fera connaître l'angle v' sous lequel on voit, du Soleil, la base AA', pourvu qu'on ait mesuré l'angle $v'Av$. Cet arc ne s'obtient pas directement. Halley proposa d'y appliquer le procédé suivant.

Fig. 39.



L'observateur A voit Vénus se mouvoir sur le disque du Soleil et parcourir, en un certain nombre d'heures, la corde *ab*. L'observateur A' lui voit décrire la corde *a'b'*. Si l'on note en chaque

station l'instant du contact du disque de Vénus avec celui du Soleil, on aura le temps employé à décrire la corde correspondante, et on en déduira aisément la longueur ab de cette corde, car le mouvement angulaire de Vénus par rapport au Soleil, à tout instant, est parfaitement connu. Dès lors la distance de la corde au centre sera

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}\Delta)^2 - (ab)^2},$$

Δ étant le diamètre angulaire du Soleil.

En faisant le même calcul pour $a'b'$, la distance des deux cordes, c'est-à-dire l'arc vv' ou son équivalent vAv', sera obtenu.

Tel est à peu près le procédé proposé par Halley ; il avait à ses yeux le mérite de substituer la mesure du temps à la mesure toujours plus délicate des arcs. Halley croyait surtout qu'en observant ce phénomène comme une éclipse de Soleil par la Lune, c'est-à-dire en notant les instants des deux contacts intérieurs du disque de Vénus et du disque solaire, on obtiendrait une très grande exactitude.

Prédiction d'un passage de Vénus.

Pour qu'il y ait contact, il faut que la distance des centres des deux astres soit égale à la somme ou à la différence des demi-diamètres apparents. $\mathcal{R}$, δ, $\frac{1}{2}\Delta$ étant les coordonnées géocentriques du Soleil et son demi-diamètre angulaire à la date t, voisine de l'instant du phénomène ; $\mathcal{R}'$, δ', $\frac{1}{2}\Delta'$ désignant les mêmes données pour Vénus ; m, n les variations horaires de $\mathcal{R} - \mathcal{R}'$, $\delta - \delta'$; la distance variable d du centre des deux astres sera le troisième côté du triangle sphérique SPV. On aura donc

$$\cos d = \cos\delta \cos\delta' + \sin\delta \sin\delta' \cos(\mathcal{R} - \mathcal{R}').$$

Mettons pour $\cos d$

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}d,$$

et pour $\cos(\mathcal{R} - \mathcal{R}')$

$$1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}'),$$

il viendra

$$\sin^2\tfrac{1}{2}d = \sin^2\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') + \sin\delta \sin\delta' \sin^2\tfrac{1}{2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}'),$$

équation dans laquelle on peut remplacer, sans erreur sensible, les sinus par les arcs correspondants. L'équation du problème sera donc, à la date $t+\theta$ (en ajoutant à chaque quantité la variation horaire multipliée par l'indéterminée θ),

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Delta-\Delta')+p\theta\right]^2=(\delta-\delta'+n\theta)^2+(Æ-Æ'+m\theta)^2\sin\delta\sin\delta'.$$

Les deux racines de cette équation, θ' et θ'', donneront $H+\theta'$, $H+\theta''$ pour les instants des contacts intérieurs vus du centre de la Terre en temps moyen de Paris.

Cela posé, si l'observateur est placé, non plus au centre de la Terre, comme nous venons de le supposer, mais en un point de la surface ayant L et λ pour coordonnées géographiques, il faudra appliquer aux Æ et δ géocentriques les effets de la parallaxe en ascension droite et en distance polaire (p. 182), ce qui donne

$$\left[Æ-Æ'+m\theta+(\pi-\pi')\frac{\sin z\sin E}{\sin\delta}\right]^2\sin\delta\sin\delta'$$
$$+\left[\delta-\delta'+n\theta+(\pi-\pi')\sin z\cos E\right]^2=\tfrac{1}{4}(\Delta-\Delta'+\nu\theta)^2.$$

Ces termes ayant été calculés pour la date t, qui implique l'heure locale $H=H_p+L$, on prendra pour Æ, qui figure dans le calcul de E, la valeur moyenne

$$H-\frac{Æ+Æ'}{2}.$$

Les coefficients m et n doivent comprendre et exprimer ici les variations horaires des Æ et des δ tels qu'ils sont vus par l'observateur, c'est-à-dire affectés de la parallaxe. C'est par ces calculs préliminaires qu'on se prépare à l'observation du phénomène; on détermine même, à l'avance, le point du disque solaire sur lequel Vénus fera sa première impression (p. 838).

Calcul des observations.

La même équation, moins les termes en θ, donnera la correction $\partial(\pi)$ de la différence $\pi-\pi'$ des parallaxes, lorsque le phénomène aura été observé, c'est-à-dire lorsqu'on aura déterminé l'heure de chaque contact.

Désignons par H l'heure observée; pour cette heure ou plutôt pour l'heure $H + L$ de Paris, on tirera des éphémérides les coordonnées des deux astres et leurs diamètres apparents; puis, en nommant $\partial(Æ)$, $\partial(\delta)$, $\partial(\Delta)$ et $\partial(\pi)$ les corrections dont les différences tabulaires $Æ - Æ'$, $\delta - \delta'$, $\Delta - \Delta'$, $\pi - \pi'$ ont besoin pour être mises d'accord avec l'observation, par N^2 la quantité

$$\left[Æ - Æ' + (\pi - \pi')\frac{\sin z \sin E}{\sin \delta}\right]^2 \sin\delta \sin\delta'$$
$$+ [\delta - \delta' + (\pi - \pi')\sin z \cos E]^2 - \tfrac{1}{4}(\Delta - \Delta')^2,$$

on aura une équation de condition de la forme

$$N^2 + A\partial(\pi) + B\partial(Æ) + D\partial(\delta) + F\partial(\Delta) = 0,$$

en négligeant, bien entendu, les carrés, les doubles produits, etc., de ces petites corrections.

Chaque observation de contact intérieur donne lieu à une équation de condition de cette forme; mais, pour traiter leur ensemble par la méthode des moindres carrés et obtenir ainsi les valeurs les plus probables des inconnues, il faut que les observations ne soient pas entachées d'erreurs systématiques.

Déformations optiques à l'instant des contacts.

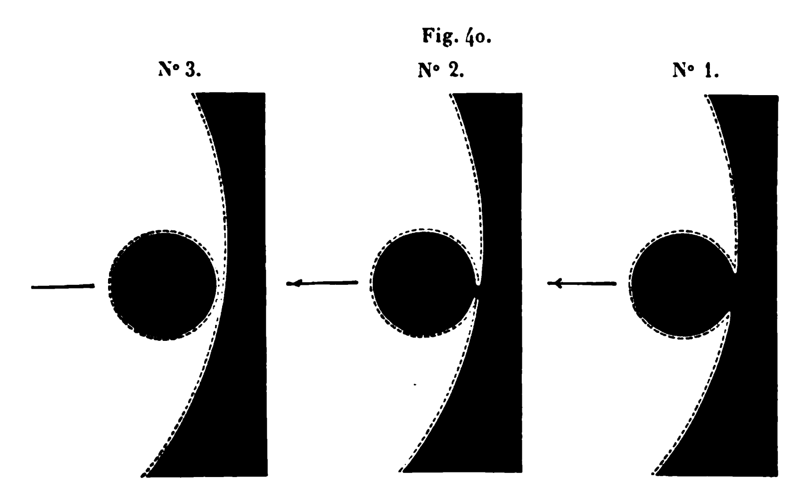
Malheureusement, ce genre d'observation n'a pas du tout répondu à l'attente générale. Au lieu du contact géométrique de deux cercles (le contour lumineux du Soleil et le contour noir de la planète), on a vu apparaître, au moment décisif, une espèce de ligament noir qui s'allongeait entre les bords voisins, et finissait par se rompre lorsque les disques paraissaient être déjà loin du contact. De là des incertitudes singulières chez les observateurs. Les uns prirent pour le moment à observer celui où les disques prolongés par la pensée à travers la goutte noire leur parurent se toucher; les autres le moment où le ligament noir ou la goutte noire se brisait et laissait apparaître subitement un mince filet lumineux. Le calcul de pareilles observations devait conduire à des résultats fort différents selon qu'on adoptait l'une ou l'autre interprétation.

Lalande a donné l'explication fort simple de ces apparences

par des causes purement optiques. Un point lumineux, une étoile, par exemple, dont le diamètre angulaire est insensible, prend dans nos lunettes des dimensions appréciables et présente un petit disque factice dont l'éclat décroît rapidement du centre au bord. C'est un effet de diffraction compliqué des effets de l'imperfection de l'objectif. Il doit donc se former aussi, autour du disque du Soleil, une étroite auréole factice qui l'amplifie un peu, tandis que le disque de Vénus, vu en projection sur le Soleil, se trouve rétréci d'autant par la même cause.

Cela posé, un peu avant le contact intérieur, le bord vrai du Soleil, celui qui est en pointillé sur la *fig.* 40, étant interrompu

Fig. 40.



sur un petit espace par le bord réel de Vénus (n° 1), les deux auréoles, extérieures pour le Soleil, intérieures pour Vénus, se trouvent supprimées sur une largeur équivalente, et les deux disques apparents semblent reliés par un espace noir. Celui-ci va en diminuant jusqu'au contact représenté au n° 2. Alors l'espace noir se réduit à un ligament noir qui se rompt subitement lorsque, entre les bords vrais, réapparaît un filet lumineux du Soleil (n° 3). Celui-ci est tellement brillant qu'un élément presque infiniment mince du bord, très exagéré sur le n° 3, suffit pour faire reparaître les auréoles factices des deux disques et dissiper la singulière apparence que nous venons de décrire. L'instant du vrai contact n'est pas, à la vérité, celui de l'apparition ou de la disparition de ce

filet lumineux, mais il n'en diffère que de bien peu, peut-être d'une fraction de seconde, tandis qu'il ne répond nullement au contact apparent des disques, tels qu'une lunette nous les fait voir [1].

Parallaxe conclue pour le Soleil.

Les astronomes du siècle dernier surent apprécier ces circonstances physiques : ils se décidèrent à rejeter les observations de contact géométrique dont l'erreur est impossible à apprécier, et ne prirent que les observations de l'apparition ou de la rupture du filet lumineux. Leur résultat, $\pi = 8'',812$, très voisin de la vérité comme nous allons le voir, est celui que Laplace a adopté dans la *Mécanique céleste*.

Malheureusement, un jeune astronome s'imagina, en 1824, qu'on avait eu tort de trier les observations. Il entreprit de déterminer la parallaxe du Soleil sur l'ensemble de toutes celles qu'on avait recueillies, en les traitant par la méthode des moindres carrés. Il trouva ainsi $8'',57$ avec une erreur probable de $0'',03$. Chose singulière, la faiblesse de cette erreur probable frappa tout le monde : on s'empressa de substituer ce faux résultat à la vraie valeur, sans songer que la méthode des moindres carrés ne s'applique pas à des observations dont une partie est visiblement entachée d'erreurs systématiques, et que, dans ces circonstances, l'erreur probable qu'on en déduit n'est pas une garantie (t. I, p. 233).

L'adoption de cette valeur eut de singulières conséquences. L'erreur était de $\frac{1}{36}$ sur la distance; elle devenait $\frac{3}{36}$ ou $\frac{1}{12}$ sur la masse de la Terre. Le calcul des perturbations causées par la Terre sur les planètes voisines, Vénus et Mars, donna des résultats trop faibles de $\frac{1}{12}$. C'était comme s'il avait manqué une fraction notable de

(1) Au dernier passage, en 1874, les observateurs ont eu soin d'employer des lunettes puissantes, mises au point avec un soin particulier. Plusieurs d'entre eux n'ont pas vu le phénomène du ligament noir; en revanche, ils ont noté, à l'instant du contact géométrique, des franges lumineuses sur le disque de Vénus.

Les résultats des nombreuses observations faites à cette occasion ne sont pas encore connus complètement. A en juger par ce qui a été publié jusqu'ici, ils sont fort discordants. La méthode photographique, que j'avais proposée moi-même, n'aurait pas non plus donné des résultats bien satisfaisants. On attend avec une sorte d'anxiété le résultat des expéditions que l'on prépare en ce moment pour le passage de décembre prochain, en 1882.

la masse de la Terre. Après avoir cherché en vain à remplacer la masse manquante dans la région de l'orbite terrestre par des anneaux hypothétiques de matière *invisible* circulant autour du Soleil, etc., on finit par reconnaître que ces discordances devaient être imputées à une fausse parallaxe, et l'on chercha d'autres méthodes que celle des passages de Vénus, qui avait autrefois inspiré une confiance absolue. On s'adressa d'abord aux petites planètes, malgré leur grand éloignement, parce qu'elles sont aussi faciles à observer avec précision que les étoiles, tandis que les planètes à disques notables, comme Mars ou Vénus, dont il faut observer les bords, donnent lieu à de singulières difficultés optiques. Il n'y avait pour cela qu'à utiliser les oppositions favorables de Flore et de Junon. Le procédé est identique à celui qui a été appliqué à Mars; on en trouvera les résultats un peu plus loin. Enfin on eut recours à des méthodes bien différentes, dont nous allons parler.

Déterminations fournies par la Mécanique céleste.

Les perturbations des planètes ou de leurs satellites dépendent de leur éloignement mutuel et de leurs distances au Soleil. Il est donc naturel que, dans l'expression analytique de ces inégalités, on rencontre parfois la parallaxe du Soleil.

Inégalité parallactique de la Lune. — C'est ainsi qu'une inégalité du troisième ordre, dans la théorie de la Lune, a pour expression

$$\frac{0,24123}{\left(1-\frac{1}{6}\frac{n^2}{n'^2}\right)\frac{a}{a'}}\;\frac{1-\frac{m'}{m}}{1+\frac{m'}{m}}\;\sin(\text{anom. moy.}\,☾ - \text{anom. moy.}\,☉),$$

n et a étant relatifs au Soleil, n', a', m' à la Lune. La masse m' de la Lune s'obtient de diverses manières; elle est de $\frac{m}{81}$ à très peu près. Les moyens mouvements n et n' du Soleil et de la Lune sont connus. Reste donc le rapport $\frac{a}{a'}$, qui peut s'écrire

$$\frac{\frac{(\rho)}{a'}}{\frac{(\rho)}{a}} = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi},$$

en désignant par π' et π les parallaxes de la Lune et du Soleil. L'observation de la Lune au méridien permet de déterminer expérimentalement la valeur numérique du coefficient de cette inégalité; on a trouvé ainsi $125'',2$. De là la relation

$$\frac{0'',24123}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{n^2}{n'^2}\right)} \frac{\sin\pi\left(1-\frac{m'}{m}\right)}{\sin\pi'\left(1+\frac{m'}{m}\right)} = 125'',2.$$

Avec les éléments de l'orbite lunaire dont on trouvera plus loin la valeur, on en déduit

$$\pi = 8'',81.$$

Inégalité mensuelle de la Terre. — Dans la théorie de la Lune, on trouvera l'explication d'une inégalité mensuelle de la Terre due à l'action de la Lune; l'expression analytique est

$$\frac{a'}{a} \frac{\frac{m'}{m}}{1+\frac{m'}{m}} \sin(☾ - ☉).$$

Les observations méridiennes du Soleil donnent $6'',50$ pour le maximum de cette inégalité. On en déduit

$$\frac{\sin\pi}{\sin\pi'} \frac{\frac{m'}{m}}{1+\frac{m'}{m}} = 6'',5,$$

d'où l'on tire

$$\pi = 8'',85.$$

Perturbations produites par la Terre. — Enfin un troisième moyen de déterminer cette parallaxe se tire des perturbations que la Terre produit dans les mouvements des planètes les plus voisines, c'est-à dire de Mars et de Vénus. Comme ces perturbations sont proportionnelles à la masse de la Terre, on comprend qu'elles offrent un moyen de déterminer cet élément, c'est-à-dire le rapport $\frac{m}{M}$. Or ce rapport s'exprime aussi, comme

nous l'avons vu, en fonction du cube de $\sin\pi$. De là un dernier moyen d'obtenir cette parallaxe. M. Le Verrier a trouvé ainsi (sauf une légère correction due à M. Stone)

$$\pi = 8'',83.$$

Méthodes physiques par la vitesse de la lumière.

Nous verrons que la vitesse de la lumière, telle qu'elle résulte de l'observation des éclipses des satellites de Jupiter, ou plutôt du phénomène de l'aberration des fixes, est

$$W = \frac{a}{497,78} \text{ par seconde.}$$

D'autre part, les physiciens ont réussi à mesurer directement cette vitesse en mètres.

M. Cornu, en suivant la méthode de M. Fizeau, a trouvé $300400^{km} \pm 1000^{km}$ par seconde. M. Michelson a obtenu, par la méthode de M. Foucault perfectionnée, $299940^{km} \pm 100^{km}$. On en déduit immédiatement a en multipliant ces nombres par 497,78; puis on obtient π par $\sin\pi = \frac{(\rho)}{a}$. Le premier donne $\pi = 8'',799$; le second $8'',813$. L'erreur probable relative du nombre $497^s,78$ est de $\frac{1}{1860}$ d'après Struve; celle de la vitesse obtenue par M. Michelson est $\frac{1}{3000}$; il en résulte $\frac{1}{1580}$ ou $0'',0056$ pour l'erreur probable de la seconde parallaxe. Ce qui ajoute encore à la valeur de cette détermination, c'est que M. Helmert, ayant corrigé légèrement le résultat de M. Cornu, est retombé presque identiquement (299990^{km}) sur celui de M. Michelson.

Résumé et conclusion.

Voici le Tableau des dix valeurs les plus récentes de cet important élément, obtenues par neuf méthodes entièrement différentes.

Méthodes géométriques 8",82.	Par la parallaxe de Mars	8",85
	Par le passage de Vénus 1769	8,79
	Par le passage de Vénus 1874	8,71 ::
	Par la parallaxe de Flore	8,87
	Par celle de Junon	8,79

Méthodes mécaniques 8",83.	Par l'inégalité parallactique de la Lune. . . .	8",81
	Par l'inégalité mensuelle de la Terre.........	8,85
	Par les perturbations de Mars et de Vénus....	8,83
Méthodes physiques 8",81.	Par la méthode de M. Fizeau................	8,799
	Par la méthode de M. Foucault..............	8,813

Les huit premiers nombres comportent une incertitude qui va de $\pm$ 0",10 à $\pm$ 0",05. Le troisième n'est même pas définitif et est marqué douteux. Leur moyenne brute est 8",825.

Les deux derniers, qui se ramènent identiquement à 8",813, ont bien plus de précision. C'est le nombre que Laplace avait adopté et que nous adopterons, après avoir constaté que les méthodes astronomiques convergent de plus en plus vers cette valeur définitive. Ainsi l'unité linéaire des astronomes, c'est-à-dire la moyenne distance de la Terre au Soleil ou demi-grand axe de l'orbite terrestre, est de

$$23408(\rho) \pm 15 \text{ ou } 16(\rho),$$

ou, en mètres, de

$$149304000^{km} \pm 100000^{km}.$$

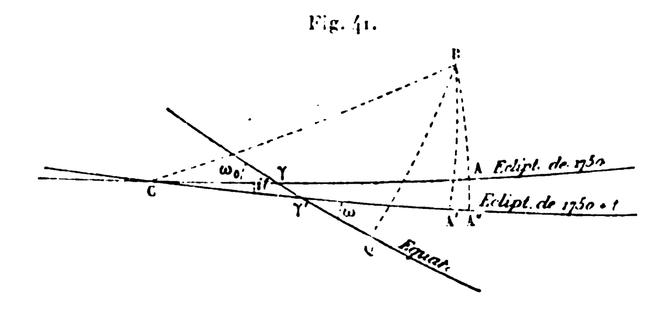
CHAPITRE XXIII.

EFFETS DU DÉPLACEMENT SÉCULAIRE DE L'ÉCLIPTIQUE SUR LES COORDONNÉES DES ASTRES.

L'observation nous a appris que l'obliquité de l'écliptique diminue de 48″ par siècle. La *Mécanique céleste* montre que cette variation est due aux attractions planétaires, et qu'elle est accompagnée d'un autre genre de déplacement dont voici la nature. Si l'on prend pour plan fixe l'écliptique de 1750, plan parfaitement déterminé par les observations de l'époque, on trouve qu'outre cette lente diminution d'obliquité l'écliptique tourne coniquement de manière que sa trace sur ce plan fixe rétrograde à raison de 5″ par an. Si l'on veut comparer les coordonnées d'un astre observé à des dates différentes, il faut donc tenir compte des changements qui se sont opérés dans la position des axes auxquels ces observations se rapportent. La *Mécanique céleste* de Laplace nous donne l'expression complète de ces variations; le reste n'est plus qu'une question de transformation de coordonnées.

La figure ci-jointe (*fig.* 41) représente en CA l'écliptique de

Fig. 41.



1750, et en CA′ celle de 1750 + t. C est le nœud descendant de la deuxième sur la première. L'équateur γγ′Q, qui échappe aux déran-

gements causés par les attractions planétaires, à cause de la forme à peu près sphérique de la Terre et surtout du grand éloignement des planètes, coupe ces deux écliptiques aux points γ et γ'. Des formules générales de la *Mécanique céleste* on déduit, pour les siècles actuels, les éléments du triangle $C\gamma\gamma'$:

$C\gamma$......	$8^\circ 23' 50'' + 5'',21\,t$,
i........	$0'',48892\,t - 0'',00000307\,t^2$,
ω_0.......	$23^\circ 28' 18''$ donné par l'observation en 1750.

Ce triangle est donc déterminé. On en déduit les trois autres éléments dont voici les valeurs (en négligeant les termes en t^2) :

$C\gamma'$..................	$C_\gamma - 0'',16443\,t$,
$\gamma\gamma'$....................	$0'',17926\,t$,
ω....................	$\omega_0 - 0'',48638\,t$,

Le plan fondamental des coordonnées, en $1750 + t$, est donc déterminé par rapport à celui de 1750, et, pour passer de l'un à l'autre, il n'y aura qu'à employer les formules ordinaires de transformation. Mais quand il s'agit seulement de quelques siècles (les observations précises ne vont pas au delà de 1650, époque où l'abbé Picard introduisit les lunettes dans les instruments de mesure), on peut se contenter de formules différentielles très simples.

Par exemple, les coordonnées d'un point B, en 1750, étant (*fig.* 41)

$$L = \gamma A = CA - C\gamma,$$
$$\beta = 90^\circ - BA,$$

elles ne diffèrent de celles de $1750 + t$

$$L' = \gamma' A' = CA' - C\gamma',$$
$$\beta' = 90^\circ - BA',$$

que de quantités très faibles, faciles à déterminer, puisque nous avons déjà, par ce qui précède, $C\gamma' - C\gamma$. Considérons en effet CA, CB comme les côtés d'un triangle rectangle CBA, dans lequel CA est invariable et l'angle C varie de $dC = i$. Les relations différentielles qui répondent à cette variation dans le triangle rectangle ABC

de la page 64, t. I [1], sont

$$db = -\tan c \cos b\, dC,$$
$$dc = \sin b\, dC.$$

Ici $db = CA' - CA$, $dc = BA' - BA$ et $dC = i$; on aura donc

$$L' - L = -0'',16443\,t - \cot\beta \cos(L + C\gamma)\,0'',48892\,t,$$
$$\beta' - \beta = -\sin(L + C\gamma)\,0'',48892\,t.$$

Quant aux coordonnées équatoriales (*fig.* 41), elles étaient en 1750

$$Æ = \gamma Q, \quad \delta = 90^\circ = BQ;$$

elles seront en $1750 + t'$

$$Æ' = \gamma Q - \gamma\gamma', \quad \delta' = 90^\circ - BQ.$$

Par conséquent

$$Æ' - Æ = -0'',17926\,t,$$
$$\delta' - \delta = 0.$$

Ces variations séculaires, dues au déplacement de l'écliptique sont donc très faibles. Elles ont pour effet de diminuer progressivement, de 0",16443 par an, la longitude des étoiles placées près de l'écliptique. Au bout de vingt siècles, cette diminution se réduit à 328" = 5'28". Elle a dû échapper complètement aux anciens astronomes.

---

(1) En différentiant logarithmiquement la formule $\tan b = \cos C \tan a$, on a

$$db = -\sin b \cos b \tan C\, dC,$$

et, comme $\sin b = \cot C \tan c$, cette formule se réduit à celle du texte.
De même, en différentiant $\sin c = \sin a \sin C$, on a

$$\frac{dc}{\tan c} = \frac{dC}{\tan C}$$

et comme $\sin b = \tan c \cot C$, on obtient la relation ci-dessus.

CHAPITRE XXIV.

EFFETS DU LENT DÉPLACEMENT DE L'ÉQUATEUR.

Les variations que nous venons d'étudier devaient, par leur petitesse, échapper aux anciens observateurs. En revanche, les Anciens ont découvert une autre variation bien plus considérable et d'origine toute différente, la précession, qui, depuis les temps d'Aristille et de Timocharis, a changé les longitudes des astres de plus de 30°. Sans cette découverte capitale, dont la Science est redevable au génie d'Hipparque, l'Astronomie serait restée à l'état rudimentaire, comme chez les Chinois qui n'ont pas connu la précession, bien qu'ils aient eu sous les yeux, pendant des milliers d'années, les effets les plus saillants de ce grand phénomène ([1]).

Découverte de ces déplacements par Hipparque.

Pour en donner une idée, nous allons comparer les coordonnées d'une même étoile, α de la Vierge par exemple, observées à des époques très différentes.

	Dates.	L.	B.
		° ′ ″	° ′ ″
Hipparque.......	−141	174. 7.30	
Bradley..........	1755	200.25.36	87.57.50
Piazzi...........	1800	201. 3. 6	87.57.43
Obs. de Paris....	1845	201.40.49	87.57.33

Ces énormes variations en longitude ne répondent nullement à

([1]) Cela tient à ce que les Chinois employaient les coordonnées équatoriales des étoiles et non les coordonnées écliptiques, comme le faisaient les Grecs. On verra, p. 240, que les effets de la précession, extrêmement simples sur les secondes, sont très compliqués pour les premières.

celles que nous venons d'étudier. L'effet de ces dernières serait de diminuer la longitude de 5′ en dix-neuf cent quatre-vingt-six ans, tandis que nous la voyons augmenter de 27°33′. Il y a donc une cause, toute différente des lentes variations de l'écliptique, qui fait croître les longitudes dans ce laps de temps de 27°33′ + 5′, c'est-à-dire de 50″ par an. Quant à l'autre coordonnée β, sa petite diminution de 10″ environ s'explique par la cause précédente; par conséquent le nouveau phénomène laisse cette coordonnée intacte.

Cet effet, bien plus considérable que le précédent, puisqu'il va à 10000″ = 2°47′ en deux siècles, ne pouvait échapper aux astronomes grecs. Effectivement Hipparque, en comparant les longitudes observées par lui avec celles des mêmes étoiles, déterminées deux siècles auparavant par Aristille et Timocharis, les trouva toutes augmentées de 2°,5 environ, tandis que les distances au pôle de l'écliptique étaient restées sensiblement constantes.

Il faut donc, de deux choses l'une, ou que le point γ, origine des longitudes, rétrograde de 50″ par an, ou que les étoiles soient toutes animées d'un mouvement direct, parallèlement à l'écliptique.

Dans le premier cas, le point vernal appartenant à l'équateur, il faudrait que celui-ci, entraîné avec ce point, mais faisant toujours le même angle avec l'écliptique, roulât coniquement autour de l'axe de l'écliptique. Il en serait de même de la ligne des pôles.

Or, la Terre étant fixe d'après la conviction de toute l'antiquité, le mouvement conique de la ligne des pôles ferait varier continuellement la colatitude géographique de chaque lieu, tandis que l'observation nous montre que ces colatitudes sont absolument invariables.

Donc ce sont les étoiles qui se meuvent lentement autour de l'axe de l'écliptique, en faisant le tour entier en

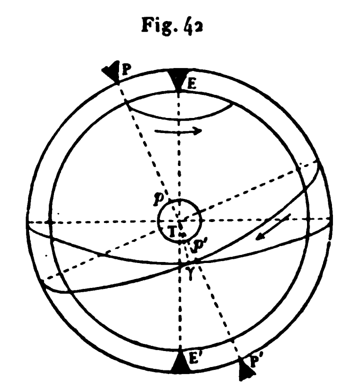
$$\frac{360^\circ}{50''} = \frac{1296000''}{50''} = 26000 \text{ ans.}$$

Ce mouvement d'ensemble n'avait rien d'étonnant pour les Anciens, qui se représentaient les étoiles comme des points brillants incrustés dans la concavité du dernier ciel.

On le réalisait géométriquement en imaginant une sphère extérieure à celle des étoiles, tournant en vingt-quatre heures autour de l'axe du monde PP′ et communiquant ce mouvement diurne à toute la machine céleste. A cette sphère serait fixée, par deux tourillons

E et E′, une sphère intérieure portant les étoiles. Celle-ci serait entraînée par la première dans son mouvement diurne autour des tourillons P et P′, mais elles auraient de plus une rotation propre

Fig. 42



très lente dans le sens direct autour des tourillons E et E′, rotation qui devait s'accomplir en vingt-six mille ans ([1]).

Quant à la Terre, immobile au centre du monde, elle serait constamment percée aux mêmes points p, p' par l'axe immobile PP′, en sorte que les coordonnées géographiques resteraient invariables, tandis que l'observateur terrestre verrait les étoiles en masse tourner lentement (indépendamment du mouvement diurne) autour du pôle E de l'écliptique.

Le point γ serait immobile, mais les longitudes des étoiles augmenteraient peu à peu, parce qu'elles s'écarteraient peu à peu de ce point dans le sens où les longitudes croissent. Par exemple, les étoiles situées sur le parallèle de 23° de distance au pôle E de l'écliptique défileraient devant le pôle P de l'équateur ou de la dernière sphère, de manière à devenir étoiles polaires, l'une après l'autre, dans la suite des siècles.

([1]) Il fallait encore une sphère, intérieure à celle des étoiles, qui fût animée d'un mouvement rétrograde en vingt-six mille ans, afin d'annuler les effets de la précession pour les sphères des sept planètes, plus une sphère extérieure, immobile pour porter les tourillons PP′. Ptolémée emploie en effet onze sphères ou cieux cristallins, sept pour les planètes (Lune y comprise), deux pour le mouvement de précession, une pour le mouvement diurne (*primum mobile*), une dernière pour renfermer le tout.

Précession des équinoxes d'après Hipparque.

Les Anciens déterminaient la longueur de l'année de deux manières distinctes qui auraient dû donner le même résultat : la première en observant le retour du Soleil aux mêmes étoiles (lever ou coucher héliaque de certaines belles étoiles); la seconde en observant comme nous l'instant de l'équinoxe, c'est-à-dire le moment où le Soleil passe par l'équateur par l'effet de son mouvement propre. La première évaluation est l'année sidérale, la seconde est l'année tropique.

D'après la première, la révolution annuelle du Soleil devait s'accomplir en $365^j,256$. Hipparque ayant déterminé, par les observations d'Aristille et de Timocharis, l'instant de l'équinoxe deux cents ans avant son époque, compara cette détermination avec les siennes. Il suffisait d'ajouter 200 fois $365^j,256$ à la date de l'ancien équinoxe déterminée par lui-même. Il trouva une différence de 3 jours. Son équinoxe observé arrivait 3 jours trop tôt, c'est-à-dire précédait de 3 jours l'époque ainsi déduite des anciennes observations. C'est là le phénomène appelé *précession des équinoxes*. Il en résultait pour l'année tropique une durée trop courte de $\frac{3^j}{200} = 0^j,014$, c'est-à-dire de $365^j,242$.

Si la révolution du Soleil paraît différente selon qu'on prend pour point de départ une étoile ou le point vernal, c'est que l'un ou l'autre de ces points n'est pas fixe. Il faut que le point vernal se meuve en sens rétrograde, chaque année, de l'espace parcouru par le Soleil en $0^j,014$, c'est-à-dire de

$$0,014 \times 59'8'' = 50''$$

à peu près, ou bien que les étoiles marchent en avant de cette quantité-là.

On retrouve donc ici les mêmes conclusions que par l'étude directe des coordonnées des étoiles. Lorsqu'on croit la Terre immobile, on est forcé de conclure, comme Hipparque l'a fait, que c'est la sphère des étoiles qui tourne lentement en sens direct autour de l'axe de l'écliptique. Dès lors, la véritable valeur de

l'année serait l'année tropique, parce qu'elle est comptée à partir d'un point fixe, le point γ.

La précession d'après Copernic.

Quand on admet, au contraire, que la Terre se meut annuellement autour du Soleil, en même temps qu'elle tourne en un jour autour de la ligne des pôles, les étoiles doivent être considérées comme des points distribués dans l'espace à toute distance, et non comme des points d'une même sphère reliés entre eux par cette surface même à laquelle ils seraient attachés. Dès lors on ne comprend plus qu'elles soient toutes animées d'un même mouvement angulaire autour de l'axe de l'orbite terrestre. C'est donc le point γ qui se déplace en sens rétrograde sur l'écliptique fixe, de manière à décrire 360° en vingt-six mille ans. Et comme ce point est l'une des intersections du cercle de l'écliptique avec celui de l'équateur, cercles dont l'angle est à très peu près constant, il faut que l'équateur et aussi la ligne des pôles tournent coniquement en vingt-six mille ans autour d'une parallèle à l'axe de l'écliptique. De la sorte, les longitudes de tous les astres augmentent de 50" par an, parce que le point vernal recule chaque année de cette quantité. La vraie révolution du Soleil est la sidérale, c'est-à-dire $365^j,256$; la révolution tropique n'est que la période des retours successifs du Soleil au point vernal ou aux solstices.

En un mot, la précession des équinoxes est due à la rétrogradation des points équinoxiaux.

D'autre part, comme les coordonnées géographiques des points de la Terre restent invariables, c'est le globe terrestre tout entier qui, sous l'action d'une cause restée inconnue à Copernic, tourne coniquement autour de l'axe de l'écliptique, à peu près comme une toupie, dont l'axe de rotation est incliné sur la verticale, tourne coniquement autour de cette verticale.

Explication mécanique de la précession.

Ce grand phénomène se présente à nous sous deux formes d'ailleurs équivalentes, comme un seul mouvement conique de

ligne des pôles (et de la Terre elle-même) autour d'une normale à l'écliptique, ou comme un mouvement de la ligne des points équinoxiaux sur l'écliptique, l'obliquité restant constante.

Sous cette dernière forme, la précession offre quelque analogie avec la rétrogradation des nœuds des orbites planétaires rapportées à un plan fixe, et surtout avec celle de l'orbite de la Lune sur l'écliptique. Nous verrons en effet, dans le Livre suivant, que les nœuds de cette orbite rétrogradent rapidement et font le tour du ciel en dix-huit ans et demi, en laissant l'inclinaison constante. Et il est facile de voir que ce curieux phénomène est dû à l'action perturbatrice du Soleil, tandis qu'on ne voit pas aisément comment cet astre viendrait troubler de la même manière la rotation de la Terre, et imprimer à la trace de son équateur un mouvement rétrograde sur l'écliptique. Newton, à qui nous devons la première explication de ce phénomène, adopta cette interprétation. Après avoir constaté que la Terre devait être aplatie aux pôles et renflée à l'équateur, il fit voir que l'action du Soleil ne pouvait être la même sur les diverses parties de la protubérance équatoriale. Il assimila cette protubérance à un anneau de satellites circulant en un jour sidéral autour du globe terrestre. Un pareil anneau devait, ainsi que la Lune, présenter le phénomène de la rétrogradation des nœuds de son plan moyen (p. 303), et comme il adhère au globe, il lui fallait en entraîner avec lui la masse entière. Cette dernière condition devait ralentir singulièrement les effets, et donner à la période de la précession une durée de vingt-six mille ans.

Malgré la beauté de cette conception, on reconnaîtra qu'elle est indirecte et même un peu forcée. On raconte que Newton vit tomber une pomme pendant qu'il réfléchissait à la force que la Terre doit exercer sur la Lune pour la retenir dans son orbite. Cet accident ramena sa pensée à la chute des graves, et le conduisit à chercher s'il n'y aurait pas identité entre la première force et la pesanteur. Si ce grand homme, pendant qu'il réfléchissait à la précession, c'est-à-dire à la rotation conique de la ligne des pôles autour de l'axe de l'écliptique, avait vu un enfant faire tourner sa toupie, il aurait certainement saisi l'identité des deux phénomènes au moment où l'axe incliné de la toupie se met à tourner coniquement autour de la verticale; il aurait alors traité la précession

comme une affection de la rotation terrestre. C'est effectivement ainsi qu'on la considère depuis d'Alembert.

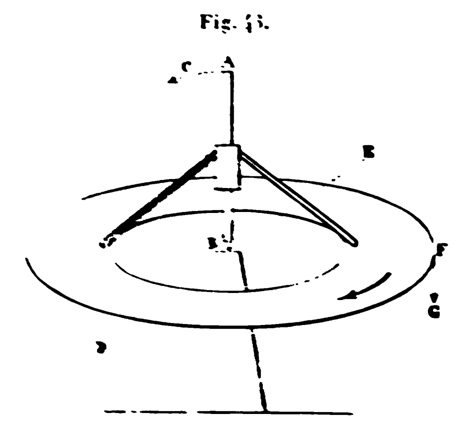
Les personnes les plus familiarisées avec la mécanique des rotations prennent plaisir à voir avec quelle facilité et quelle élégance on reproduit ces phénomènes par un simple toton. L'appareil se compose d'une plaque circulaire de fer-blanc, évidée au centre, à laquelle on soude par quelques tiges une petite douille dans laquelle un axe de rotation glisse à frottement dur. On amène ainsi, à volonté, la pointe de l'axe au centre de gravité du petit appareil, ou bien au-dessus, ou au-dessous de ce point.

La ligne autour duquel il tourne est évidemment un axe principal d'inertie si l'appareil est bien équilibré, et la rotation autour de cet axe est parfaitement stable. C'est ce qu'on vérifie aisément : quelque position qu'on donne à cet axe, en faisant tourner le toton, il conservera sa direction tant que la vitesse de rotation restera grande par rapport au petit frottement de la pointe sur le support. Rien de plus facile alors que de vérifier la règle bien connue de la composition des rotations.

Expériences sur la composition des rotations.

Pressons brusquement sur le bord du toton dans le sens FG, de manière à lui imprimer une rotation autour du diamètre équatorial

Fig. 43.



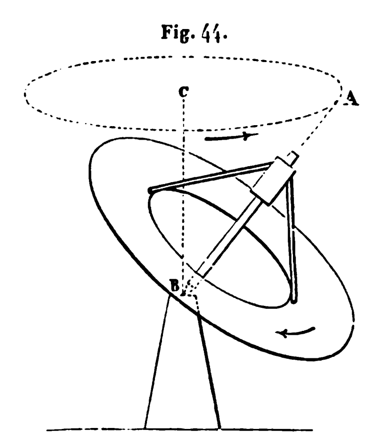
DE, perpendiculaire à FB. Cette rotation ne s'effectuera pas si le toton tourne déjà autour de son axe : elle se composera avec celle

du toton en forçant l'axe de rotation à se déplacer dans un plan perpendiculaire à BF. Portons sur BA et BD des longueurs proportionnelles aux moments des deux couples et construisons sur ces deux droites un parallélogramme. La diagonale sera, en grandeur et en direction, l'axe du couple résultant. Et comme la rotation doit s'exécuter autour de l'axe principal d'inertie de l'appareil, celui-ci s'inclinera dans le sens AC et prendra la direction BC de cette résultante, située, comme nous venons de le dire, dans un plan perpendiculaire à BF.

L'effet est très frappant; à chaque impulsion donnée au toton de haut en bas, dans la direction FG par exemple, on voit son axe s'incliner aussitôt, non pas vers FG, mais dans la direction perpendiculaire, à gauche si la rotation est rétrograde comme sur la figure, à droite si elle est directe. Il ne faut pas oublier que le moment du couple perturbateur doit être porté sur BD, dans le premier cas, et non sur BE, afin que les rotations qu'il s'agit de composer aient le même sens pour des observateurs couchés sur leurs axes, les pieds tournés vers le point B.

La seconde expérience consiste à placer le centre de gravité du toton au-dessus du point d'appui B. C'est le cas de la toupie. Dès que l'axe s'écartera de la verticale, l'action de la pesanteur ten-

Fig. 44.

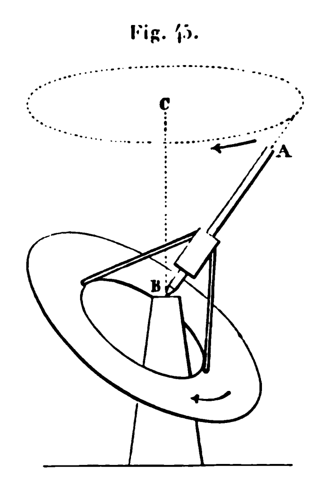


dra à le faire chavirer autour de sa pointe, en lui imprimant à chaque instant une vitesse de rotation autour d'un diamètre horizontal de l'équateur. Mais si l'on a communiqué une rotation au

toton, on verra se produire le phénomène si connu de la toupie; au lieu de chavirer, l'axe BA se mettra à tourner coniquement autour de la verticale BC dans le sens même de la rotation. L'inclinaison CBA restera constante, la vitesse angulaire de la rotation ne sera pas changée.

Lorsque le point d'appui est au-dessus du centre de gravité, l'axe BA, une fois incliné, tendra à revenir à la verticale, en faisant exécuter au toton un mouvement de sens inverse du précédent. Mais si le toton tourne, ce mouvement ne s'effectuera pas; l'axe AB décrira un cône droit autour de la verticale, en sens opposé à celui de la rotation du toton. C'est ici l'image fidèle du mou-

Fig. 45.



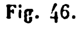
vement de précession de l'axe de la Terre, à cela près que la rotation de la Terre est directe et non rétrograde comme celle de la figure, et que le phénomène de la toupie est compliqué de la réaction du support, tandis que notre globe est entièrement libre.

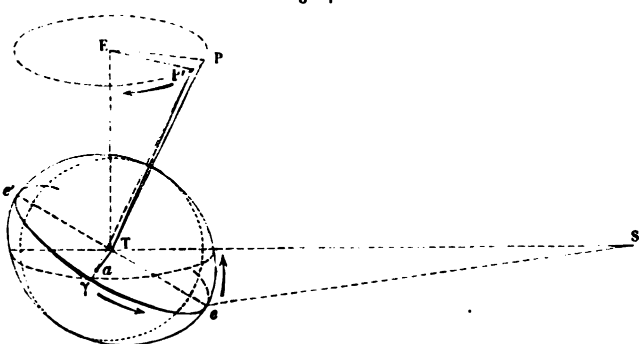
Action du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial.

Appliquons maintenant ces considérations à notre globe. Sa rotation autour de son plus petit axe d'inertie est parfaitement stable. Dans le mouvement annuel de son centre de gravité, quelque peu troublé par les attractions planétaires, l'axe de rotation se transporterait parallèlement à lui-même si les actions exté-

rieures se réduisaient à des forces dont la résultante passât constamment par ce centre. Mais il est facile de voir qu'il n'en est pas tout à fait ainsi pour les attractions du Soleil et de la Lune. Considérons d'abord le Soleil seul, et supposons-nous au solstice d'été dans la figure ci-jointe.

L'écliptique étant représenté par un plan horizontal passant par ST, l'axe de rotation par TP incliné de l'angle ω sur la verticale TE, ee' l'équateur coupant l'écliptique suivant la ligne Tγ perpendiculaire au plan de la figure, le renflement équatorial que ce plan, passant par le Soleil, divise en deux parties symétriques, pourra être considéré comme engendré par la révolution, autour de TP, des lunules comprises entre l'ellipse méridienne et le cercle décrit sur le diamètre polaire. La masse de ce renflement


Fig. 46.



est une petite fraction de celle du globe, égale à peu près à $\frac{2}{292}$, du moins en supposant la Terre homogène. La résultante des actions du Soleil sur les molécules de la sphère centrale passe par T, mais non celle des attractions exercées sur la protubérance équatoriale. La partie e étant plus voisine du Soleil que la région e' de tout un diamètre de la Terre, la résultante passera un peu au-dessous de T, et tendra à faire tourner le globe tout entier autour de Tγ dans le sens direct. Si la Terre ne tournait pas, cette faible rotation autour de Tγ s'effectuerait avec lenteur, l'équateur marcherait vers l'écliptique et la ligne TP vers la ligne TE.

Mais, en présence de la rotation diurne, le couple ainsi engendré autour de Tγ ne peut que se combiner avec le couple dont l'axe est TP. Portons en Tγ et TP des droites proportionnelles à leurs

moments, en considérant que les rotations sont ici de même sens [1]; la diagonale du rectangle construit sur ces deux droites sera, en grandeur et en direction, le moment du couple résultant. L'axe principal TP sera dévié perpendiculairement au plan de la figure, en TP'; dans cette nouvelle position l'équateur coupera l'écliptique suivant une nouvelle trace $T\gamma'$. Comme la force perturbatrice qui tend à faire tourner l'équateur *ee'* ne cesse pas d'agir, à l'instant suivant l'axe polaire subira une nouvelle déviation infiniment petite dans le plan $P'T\gamma'$, et ainsi de suite. Finalement, il sera animé d'un mouvement conique autour de TE, dans un sens opposé à la rotation diurne. Cela revient à dire que la ligne $T\gamma$ se mouvra dans le sens rétrograde sur l'écliptique.

L'angle PEP' étant un infiniment petit du premier ordre, la différence EP' — EP sera un infiniment petit du second ordre; par conséquent, le rayon du cercle décrit par le point P autour du point E, sur une sphère quelconque de rayon TE, sera constant et égal à ω. Le moment TP' du couple résultant ne différant du moment TP que d'un infiniment petit du second ordre, la rotation de la Terre reste constante. Enfin l'angle PTP', c'est-à-dire la vitesse angulaire du mouvement conique de l'axe, ou celle du point γ qui s'en déduit, serait invariable si le couple produit par l'action perturbatrice du Soleil était constant. Mais il ne conserve une valeur constante que vers l'époque du solstice. Partout ailleurs l'axe de ce couple ne coïncidera plus avec la ligne $T\gamma$. Mais son moment pourra être décomposé en trois autres, suivant les directions rectangulaires $T\gamma$, Te et TP'. Le premier continuera le phénomène de la précession; le second produira une petite variation dans l'angle ETP = ω; le troisième produira une imperceptible variation dans la vitesse de rotation.

En désignant par A, B, C les moments principaux d'inertie, la théorie des rotations montre que les moments de ces couples sont proportionnels aux différences C — A, B — C, A — B. Or nous avons vu, en Géodésie, que la Terre est un ellipsoïde de révolution; par suite A = B, et le dernier moment, celui qui influerait sur la rotation, est nul.

---

(1) Au solstice d'hiver, le moment du couple perturbateur devrait être porté sur le prolongement [illegible]; il est facile de s'assurer que l'effet produit sera de même sens.

A ne considérer que le Soleil, la vitesse du mouvement conique de TP autour de TE irait en diminuant du solstice à l'équinoxe voisin, où elle s'annulerait, parce que, dans cette dernière position, le Soleil se trouvant dans la direction opposée à Tγ, le renflement équatorial se présenterait à lui d'une manière symétrique, en sorte que le couple considéré serait alors nul. Mais l'action de la Lune ([1]), plus rapidement variable et plus énergique que celle du Soleil, s'opère dans le même sens, de manière à produire finalement un mouvement continu du pôle P, avec quelques inégalités périodiques que nous examinerons plus tard.

Les astronomes décomposent en effet la précession en deux parties, l'une proportionnelle au temps, l'autre périodique. La première serait constante si l'angle ω était invariable. Mais nous avons vu que cet angle diminue progressivement en vertu des attractions planétaires; il en résulte que la partie moyenne de la précession présentera elle-même une légère variation séculaire, c'est-à-dire un terme en t^2, et il en sera de même de l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique fixe de 1750, que nous représenterons par ω'_0 à une date quelconque $1750 + t$.

Laplace a donné, dans la *Mécanique céleste,* l'expression analytique complète de ces déplacements en fonction des moments d'inertie de l'ellipsoïde. Mais, pour calculer ceux-ci, il faudrait connaître la loi des densités des couches dont se compose le globe terrestre. Il a donc fallu avoir recours aux observations elles-mêmes, faites à des époques très distantes, pour déterminer les coefficients des termes principaux. De là les expressions numériques suivantes, bien suffisantes pour un laps de temps de quelques siècles.

$$\begin{aligned} PEP' &= 0'',37572\,t - 0'',0002436\,t^2, \\ EP &= \omega'_0 + 0'',00000934\,t^2, \\ \omega_0 &= 22^\circ 28' 18'', \end{aligned}$$

le temps t étant compté en années tropiques à partir de 1750.

([1]) La force perturbatrice du Soleil est $\frac{M}{D^3}$; celle de la Lune $\frac{m'}{d^3}$; $D = 24000\,(\rho)$, $d = 60\,(\rho)$, $M = 330000\,m$, $m' = \frac{m}{80,7}$. Avec ces données, on trouve que l'action lunaire est 2,4 fois plus énergique que celle du Soleil.

CHAPITRE XXV.

PRÉCESSION LUNI-SOLAIRE ET PRÉCESSION GÉNÉRALE.

L'équateur terrestre tournant coniquement autour de l'axe de l'écliptique, en vertu de l'action exercée par le Soleil et la Lune sur le renflement équatorial de notre globe, ses positions successives seront représentées comme il suit.

Fig. 47.

Nous aurons

$$\gamma\gamma'' = C\gamma - C\gamma'' = 50'',37572\,t - 0'',0001218\,t^2,$$
$$\omega_t = 23°28'18'' - 0'',0000098\,t^2,$$

$C\gamma$ a été donné plus haut. A l'aide de ces trois éléments du triangle $C\gamma''\gamma'$, on calculera les trois autres :

$$\gamma'\gamma'' = [illegible]\,t - 0'',000[illegible]4\,t^2,$$
$$C\gamma' = C\gamma'' - 0'',10443\,t - 0'',0002439\,t^2,$$
$$\omega' = 23°28'18'' - 0'',48368\,t - 0'',0000272\,t^2.$$

Cela posé, les coordonnées du point B étant, en 1750,

$$l = CA = C\gamma + \gamma A,$$
$$\lambda = 90° - BA.$$

elles deviendront, en $1750 + t$,

$$L' = CA' - C\gamma'',$$
$$\beta' = 90^\circ - BA';$$

et, comme $CA' - CA = -i \cot\beta \cos(L + C\gamma)$, nous aurons

$$L' = L + C\gamma - C\gamma'' - i \cot\beta \cos(L + C\gamma),$$
$$\beta' = \beta + i \sin(L + C\gamma).$$

Cette quantité $C\gamma - C\gamma''$, commune à toutes les étoiles, est la différence des deux expressions déjà données

$$\begin{array}{rl} C\gamma = C\gamma''' + & 50'',37572\,t - 0'',0001218\,t^2 \\ C\gamma'' = C\gamma''' + & 0,16443\,t - 0,0002439\,t^2 \\ \hline C\gamma - C\gamma'' = & 50,21129\,t + 0,0001221\,t^2 \end{array}$$

C'est ce qu'on nomme la *précession générale;* elle est égale, comme on le voit, à la précession luni-solaire moins le petit déplacement du point vernal dû aux perturbations planétaires. On a donné à ce dernier le nom de *précession par les planètes,* mais à tort, puisqu'il est de sens contraire à la précession proprement dite.

Coordonnées équatoriales.

Pour passer des coordonnées de 1750 à celles de $1750 + t$, prenons pour intermédiaire les coordonnées écliptiques L et β en 1750. Nous les rapporterons au point γ''' en ajoutant à L l'arc $\gamma\gamma'''$, ou la précession luni-solaire; puis nous appliquerons à ces coordonnées les formules de transformation

$$\cos\delta = \cos\omega'_0 \cos\beta + \sin\omega'_0 \sin\beta \sin(L + \gamma\gamma'''),$$
$$\sin\delta \sin(\text{Æ} + \gamma'''\gamma'') = -\sin\omega'_0 \cos\beta + \cos\omega'_0 \sin\beta \sin(L + \gamma\gamma'''),$$
$$\sin\delta \cos(\text{Æ} + \gamma'''\gamma'') = \sin\beta \cos(L + \gamma\gamma''').$$

Comme les Æ en $1750 + t$ se comptent de γ'' et non γ''', nous avons dû ajouter l'arc $\gamma'''\gamma''$ à l'arc $\gamma''Q$, c'est-à-dire à Æ, pour avoir l'arc $\gamma'''Q$ qui doit figurer dans ces formules. Nous aurons

ainsi les coordonnées équatoriales pour $1750 + t$ par un calcul rigoureux.

Mais les astronomes, ayant à chaque instant à transporter des observations d'une époque à une autre peu éloignée, trouvent commode de calculer tout simplement les dérivées $\frac{d\mathit{Æ}}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$, et de les multiplier par l'intervalle de temps.

En différentiant les formules précédentes par rapport à $\mathit{Æ}$, δ et aux autres quantités $\gamma\gamma''$, $\gamma'''\gamma''$, il viendra

$$\frac{d\mathit{Æ}}{dt} = (\cos\omega'_0 + \sin\omega'_0 \cot\delta \sin\mathit{Æ}) \frac{d\gamma\gamma''}{dt} - \frac{d\gamma''\gamma'}{dt} \ldots \text{ (1)}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\sin\omega'_0 \cos\mathit{Æ} \frac{d\gamma\gamma''}{dt}.$$

Une partie de ces termes peut être calculée pour toutes les étoiles. En posant

$$m = \cos\omega'_0 \frac{d\gamma\gamma''}{dt} - \frac{d\gamma''\gamma'}{dt},$$

$$n = \sin\omega'_0 \frac{d\gamma\gamma''}{dt},$$

on aura

$$m = 46'',02824 + 0'',00030864\, t,$$

$$n = 20'',06442 - 0'',00009702\, t$$

et, par suite,

$$\frac{d\mathit{Æ}}{dt} = m + n \cot\delta \sin\mathit{Æ},$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -n \cos\mathit{Æ}.$$

Il faudrait sans doute intégrer ces expressions entre $1750 + t$ et $1750 + t'$; mais on peut se contenter de calculer les valeurs numériques de ces dérivées pour l'époque intermédiaire $1750 + \frac{t + t'}{2}$ et de les multiplier par $t' - t$. Le résultat sera exact aux termes près du troisième ordre.

---

(1) On peut, sans erreur sensible, écrire ici $\mathit{Æ}$ au lieu de $\mathit{Æ} + \gamma''\gamma'$ qu'il faudrait mettre en toute rigueur.

En effet, $\mathcal{R}_1$ et δ_1 étant des valeurs approchées pour $1750 + \frac{t'-t}{2}$, l'ascension droite pour $1750 + t$ sera

$$\mathcal{R}_1 - \frac{d\mathcal{R}_1}{dt}\left(\frac{t'-t}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{R}_1}{dt^2}\left(\frac{t'-t}{2}\right)^2 - \ldots$$

et pour $1750 + t'$

$$\mathcal{R}_1 + \frac{d\mathcal{R}_1}{dt}\left(\frac{t'-t}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{R}_1}{dt^2}\left(\frac{t'-t}{2}\right)^2 + \ldots.$$

Par conséquent, la variation totale pour $t'-t$ s'obtiendra en retranchant la première expression de la deuxième, ce qui donne

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(t'-t).$$

Exemples numériques.

En 1755, α de la Vierge avait pour coordonnées, le 1er janvier,

$\mathcal{R}$.......... $198°4'48''$ δ.......... $99°52'28''$.

Calculer les coordonnées pour 1845, même date.

L'époque intermédiaire est 1800. On trouve aisément, par un calcul rapide fait avec les formules précédentes, en employant les valeurs brutes de m et de n (¹), pour 1800 :

$\mathcal{R}$......... $198°40'$ δ............. $100°7'$.

Les coefficients m et n deviennent donc, pour la même date,

m......... $46'',0437$ n............. $20'',05957$.

(¹) De 1755 à 1800, il y a 45 ans : $45\,m = 34'30''$; $198°5' + 35' = 198°40'$. $20''\cos\mathcal{R} \times 45 = 858'' = 14'18''$; ... ; $99°52' + 15' = 100°7'$. Par conséquent on a, avec une exactitude suffisante,

$$\mathcal{R} = 198°40', \quad \delta = 100°7'$$

pour l'époque intermédiaire 1800.

On aura ensuite, en calculant à cinq décimales :

log n..........	1,30232	log n.............	1,30232 n
log cot δ........	9,25146 n	log cos Æ..........	9,97653 n
log sin Æ.......	9,50523 n		1,27885
	0,05901	log $(t' - t)$.......	1,95424
			3,23309
Nombre.....	1″,1455	Nombre.......	1710″,6
m...........	46,0437		
	47,1892		
$t' - t$.......	90		
$\frac{dÆ}{dt}(t' - t)$..	4247,0280		
Préc. en Æ..	1°.10′.47″,03	Préc. en δ..	28′.30″,6
	198. 4.48		99°.52.28
Æ en 1845..	199.15.35,0	δ en 1845.....	100.20.58,6

S'il s'agissait d'un laps de temps beaucoup plus grand, ou même d'une étoile voisine du pôle, il faudrait recourir aux formules rigoureuses de transformation des coordonnées.

On demande, par exemple, la distance polaire de l'étoile Canopus en l'an [illegible]. On trouve dans le Catalogue de l'Association Britannique

		Précession.	Var. séc.
1850 [illegible]	[illegible] 36.56″,4	[illegible] 1″,80	— 0″,193

L'effet de la précession pour — 1870 ans serait grossièrement

$$[illegible] \; 8″,5.$$

Par suite on aurait δ = 142°.37 pour l'époque indiquée. Si l'on voulait plus de précision, il faudrait prendre dans le Catalogue l'Æ de l'étoile en même temps que le δ, et ramener ces coordonnées à l'époque 1750 par les précessions du Catalogue, ce qui, dans ce cas, est suffisamment exact ; on aurait ainsi

$$[illegible] \; Æ = [illegible] \quad \delta = 142.24.6″$$

[illegible] L et β :

$$[illegible] \quad \beta = 1673.1.4″.$$

Puis on aurait, pour l'an —20, par la formule de la précession générale (p. 239),

$C\gamma - C\gamma'''$	$24°.52'.26'',4$
L, en 1750	101.30.38,4
L', en —20	76.38.12
β'	165.51.21

Enfin on calculerait δ' par la formule

$$\cos\delta' = \cos\omega'_0 \cos\beta' + \sin\omega'_0 \sin\beta \sin L',$$

en donnant à ω'_0 la valeur $23°28'49''$, tirée de la formule de la page 238. On obtiendrait finalement

En l'an — 20, δ de Canopus .... 142°33'35" (¹)

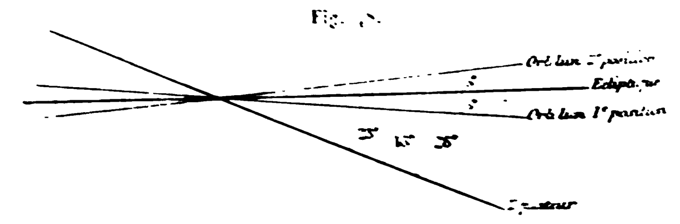
(¹) C'est par une erreur de transcription qu'on a mis 142°30' à la page 243 du Tome I.

CHAPITRE XXVI.

NUTATION.

Dans cette exposition tout élémentaire du phénomène de la précession, nous avons vu que l'action du Soleil sur le renflement équatorial atteint son maximum aux deux solstices et s'annule aux deux équinoxes. Il en est exactement de même de la Lune : son action devient nulle au moment où cet astre traverse l'équateur. Newton avait fait remarquer que la précession, c'est-à-dire l'intégrale des actions susdites, doit présenter deux petites inégalités périodiques dépendant du double de la longitude du Soleil et du double de la longitude de la Lune ; mais elles lui parurent trop petites pour qu'il fût nécessaire de les calculer. Chose singulière, Newton et ses successeurs immédiats ne remarquèrent pas qu'une inégalité analogue, mais bien plus considérable, devait provenir de ce que la Lune s'écarte tantôt plus, tantôt moins de l'équateur, par suite de la rétrogradation rapide des nœuds de son orbite. Nous verrons en effet, au Livre suivant, que l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique est toujours de 5°, mais que le roulement conique de ce plan sur celui de l'écliptique fait varier son inclinaison sur l'équateur de 18° à 28° (fig. 18).

Fig. 18.



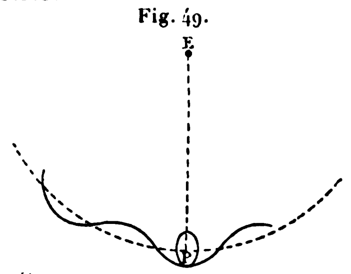
La figure représente ces trois plans aux moments où le nœud

ascendant de l'orbite lunaire coïncide avec le point γ et, dix-huit ans et demi après, avec le point $\gamma + 180^{\circ}$.

Il doit résulter de là, dans le mouvement conique de l'axe terrestre, une sorte de trépidation analogue à celles dont nous venons de parler, mais beaucoup plus marquée, et ayant pour période celle de la cause indiquée, c'est-à-dire la révolution des nœuds de l'orbite lunaire. L'effet est assez semblable à celui qui se produit sur un toton incliné, lorsqu'on en détruit la symétrie par l'adjonction d'une petite masse.

L'axe poursuit, comme auparavant, son mouvement conique autour de la verticale, mais en décrivant un très petit cône elliptique (*fig.* 49) autour de la position qu'il eût occupée avant la destruction de la symétrie.

Fig. 49.



C'est à Bradley que la découverte de cette nutation est due. Ce célèbre astronome avait institué, avec un secteur zénithal de grande dimension, une série d'observations sur les étoiles qui passaient près de son zénith, pour en étudier la parallaxe. Il ne parvint pas à mesurer les minimes effets dus au déplacement annuel de la Terre, mais il découvrit à leur place l'aberration. Or, après avoir tenu compte de l'aberration et de la précession, il restait encore, dans les distances polaires conclues pour ces étoiles, des variations régulières dont la période était d'environ dix-huit ans. La cause qui les produisait devait donc avoir elle-même une période de dix-huit ans. Cette simple remarque amena Bradley à rattacher ce phénomène au mouvement des nœuds de la Lune, et par suite à une inégalité non encore aperçue dans la partie de la précession qui provient de son action. Cette inégalité devait être de la forme

$$\sin\omega\,\partial L = -\nu\cos 2\omega\sin N,$$
$$\partial\omega = \nu\cos\omega\cos N,$$

N étant la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire. Ainsi le pôle décrit, en dix-huit ans et demi, une petite ellipse dont les axes sont $\nu \cos 2\omega$ et $\nu \cos \omega$, tandis que le centre de cette ellipse se meut circulairement autour du pôle de l'écliptique. L'observation donne $\nu = 10'',05$ (d'après les calculs de M. Peters); par conséquent

$$\partial L = -17'',24 \sin N,$$
$$\partial \omega = \quad 9,22 \cos N.$$

Le point γ, origine commune des Æ et des L de tous les astres, est donc soumis à une fluctuation périodique de $17'',24$ d'amplitude de part et d'autre de la position qu'il occuperait en vertu de la précession seule. En même temps l'obliquité ω varie, dans la même période de dix-huit ans et demi, de $\pm 9'',22$.

Les astronomes comprennent sous le nom de *nutation* toutes les inégalités précédentes, dont voici les termes principaux :

$$\begin{aligned}\partial L = &-17'',24 \sin N + 0'',21 \sin 2N\\ &- 1,27 \sin 2\odot - 0'',20 \sin 2☾\\ \partial \omega = &\;\; 9'',22 \cos N - 0'',09 \cos 2N\\ &+ 0,55 \cos 2\odot + 0'',09 \cos 2☾.\end{aligned}$$

Désignons par L et β les coordonnées écliptiques d'un astre rapportées à l'équinoxe moyen, par L_1 et B_1 les coordonnées rapportées à l'équinoxe vrai, par ω l'obliquité moyenne de l'écliptique (non affectée de la nutation), par ω_1 l'obliquité vraie : pour passer des premières aux secondes, on aura les formules

$$\begin{aligned}L_1 - L &= -17'',24 \sin N + \ldots,\\ \beta_1 - \beta &= \quad 0,\\ \omega_1 - \omega &= \quad 9,22 \cos N + \ldots\end{aligned}$$

La *Connaissance des Temps* donne ces valeurs pour toute l'année. Quant aux coordonnées équatoriales, on aura, en différentiant les formules de transformation des coordonnées par rapport à L, ω, Æ et δ, et en remplaçant ∂L et ω par les valeurs ci-dessus :

$$Æ_1 - Æ = -17'',24 \sin N (\cos\omega + \sin\omega \cot\delta \sin Æ) - 9'',22 \cos N \cot\delta \cos Æ,$$
$$\delta_1 - \delta = -17'',24 \sin N \sin\omega \cos Æ - 9'',22 \cos N \sin Æ.$$

Lorsqu'on calcule pour la première fois l'orbite d'une comète ou d'une petite planète, on néglige ces minimes corrections; mais on en tient compte plus tard, lorsqu'il s'agit d'obtenir les éléments définitifs de l'orbite. Alors on ne saurait négliger les variations dues aux déplacements des axes des coordonnées, variations qui n'ont rien de commun avec les mouvements de l'astre observé. On aura donc soin de rapporter les L à l'équinoxe *moyen* d'une même époque, en retranchant de chaque longitude la nutation correspondante, ainsi que l'effet de la précession pour l'intervalle compris entre le jour de l'observation et celui qu'on a choisi pour époque.

EXEMPLE. — *On demande la longitude du Soleil le* 10 *décembre* 1882, *rapportée au point* γ *moyen du* 1er *janvier de la même année.*

La *Connaissance des Temps* (p. 5) donne $+12'',81$ pour la nutation au 10 décembre, et $+47'',61$ pour l'effet de la précession, du 1er janvier au 10 décembre.

Elle donne en outre (p. 43) pour le 10 décembre :

$\odot$ rapportée au point γ vrai du 10 décembre	$258^\circ.22'.34'',5$
Retranchez la nutation	$12,81$
$\odot$ rapportée au point γ moyen du 10 décembre	$258.22.21,69$
Retranchez la précession............................	$47,61$
$\odot$ rapportée au point γ moyen du 1er janvier.	$258.21.34,1$

CHAPITRE XXVII.

EFFETS DIVERS DES VARIATIONS SÉCULAIRES.

Variabilité de l'année tropique.

L'année tropique de $365^j,242217$ est l'intervalle de temps compris entre deux retours consécutifs du Soleil au point γ. Pendant ce temps, le point γ a marché lui-même à l'encontre du Soleil de $50'',211$ (précession générale). Quand le Soleil aura atteint le point γ, il lui restera à parcourir ces $50'',211$ pour revenir à son vrai point de départ.

Soient n la vitesse angulaire diurne du Soleil, n' sa vitesse diurne tropique (rapportée au point γ), p la vitesse diurne de ce dernier; on aura $n = n' - p$.

Or

$$n' = \frac{360^\circ}{365,2422} = 3548'',331, \quad p = \frac{50'',211}{365,2422} = 0'',138.$$

Par conséquent, la vitesse réelle $n = 3548'',193$. On aura donc, pour l'excès de l'année sidérale sur l'année tropique,

$\frac{50'',211}{n}$	$0^j,014151$
Année tropique................	$365,242217$
Somme ou année sidérale.......	$365,256368$

La première règle les retours du Soleil aux mêmes longitudes, par conséquent au point γ où L et Æ $= 0$, époque où commence le printemps; ou bien encore au point de l'écliptique où L $= 90^\circ$ et Æ $= 90^\circ$, commencement de l'été, etc... C'est la période des saisons et du calendrier.

La seconde est la véritable mesure de la révolution du Soleil;

c'est elle qui doit figurer dans les lois de Kepler. Elle est invariable si l'on considère sa durée moyenne dans la suite des siècles, ainsi que la vitesse moyenne diurne représentée par n.

L'année tropique, au contraire, est affectée d'une légère variation séculaire, due à celle de la précession qui figure dans la formule $T = \frac{360^{\circ}}{n+p}$. En effet, nous avons vu (p. 239) que, par suite des variations séculaires de l'écliptique, la précession générale est, au bout d'un temps t,

$$50'',211\,t + 0'',0001221\,t^2.$$

Sa variation annuelle est donc

$$50'',211 + 0'',0001221\,t \times 2.$$

Ainsi, à la valeur précédente de p, il faut ajouter

$$\frac{0'',0002442\,t}{T}.$$

Or, si au dénominateur de la fraction $T = \frac{360^{\circ}}{n+p}$ on ajoute ce petit terme, la durée de l'année tropique diminuera de

$$\frac{360^{\circ}}{(n+p)^2}\,\frac{0'',0002442\,t}{T} = \frac{0'',0002442\,t}{n+p}.$$

Elle sera donc de $365^{j},242217 - 0^{j},0000000688\,t$.

Il y a 2000 ans, du temps d'Hipparque, l'année tropique était donc plus longue de $0^{j},00001376$ ou de 11^{s} qu'aujourd'hui, tandis que l'année sidérale moyenne avait exactement la même valeur.

Influence de la nutation sur le jour sidéral.

En vertu d'une convention universellement adoptée, le jour sidéral commence en chaque lieu au moment où le point γ passe au méridien. Il s'agit ici du point γ vrai, point où l'équateur actuel coupe l'écliptique. Ce point n'est pas fixe, comme nous l'avons supposé jusqu'ici ; il est animé d'une vitesse diurne de

$$-\frac{50'',2}{365,24} + 17'',24\cos N\,\partial N,$$

expression où ∂N représente le mouvement moyen diurne du nœud de la Lune, c'est-à-dire $-3'10''$. Le petit terme périodique $17'',24 \cos N \sin 3'10''$ est insensible d'un jour à l'autre. Il n'en est pas tout à fait de même du premier dont la valeur est $-0'',14$. La vitesse de la rotation relative au point γ étant $360° + 0'',14 + 17'',24 \cos N \sin 3'$, la durée du jour sidéral sera (celle de la rotation terrestre étant 1)

$$\frac{1296000}{1296000 + 0,14 + 17,24 \cos N \sin 3'}.$$

On voit donc que le jour sidéral serait tout à fait constant sans la nutation. Mais ce défaut d'uniformité est parfaitement négligeable d'un jour à l'autre. On n'en tient pas compte, bien que l'effet accumulé de jour en jour puisse aller de -1^s à $+1^s$ en dix-huit ans, parce qu'on n'évalue jamais de longs espaces de temps en jours sidéraux, mais en jours moyens. Or, d'après la définition du jour moyen, le mobile considéré étant un Soleil fictif dont l'Æ est égale à la longitude moyenne du Soleil, cette longitude se compte à partir du point γ moyen affecté de la précession, mais non de la nutation; celle-ci ne figure que dans l'équation du temps (p. 57), dont l'expression complète est

Éq. du centre + Perturb. — Nutation — Red. à l'équateur.

Masse de la Lune et aplatissement du globe terrestre.

L'analyse donne les expressions théoriques de la précession luni-solaire et de la nutation. Dans ces expressions, les masses des deux astres, ainsi que les moments d'inertie principaux de notre globe, figurent nécessairement. Ces moments d'inertie ou plutôt leurs rapports sont inconnus; mais, en égalant les expressions de ces inégalités aux valeurs que l'observation assigne à la précession luni-solaire et à la nutation, on obtient des équations desquelles on peut déduire la masse de la Lune et le rapport des deux moments d'inertie du globe terrestre. De ce rapport on déduirait l'aplatissement, si la loi suivant laquelle la densité varie à l'intérieur de la Terre était connue. Comme on ne peut faire à ce sujet que des hypothèses, il faut se contenter de tirer de ces calculs une li-

mite supérieure de l'aplatissement. Le calcul donne $\frac{1}{270}$. L'aplatissement $\frac{1}{292}$ que nous avons trouvé dans le Tome I est effectivement au-dessous de cette limite.

Température moyenne du globe et variation des saisons.

Il semble, de prime abord, que les variations séculaires dont sont affectés les éléments de l'orbite de la Terre et ceux de sa rotation doivent avoir une grande influence sur la température et expliquer certaines phases géologiques. Voici ce que nous pouvons dire à ce sujet.

1° La distance moyenne a du Soleil est invariable, ainsi que la durée T de la révolution.

2° L'excentricité e va actuellement en diminuant, mais, à aucune époque, celle-ci n'a pu et ne pourra dépasser la petite quantité 0,077.

3° Le périgée est animé d'un mouvement progressif de 11″,6. Sa longitude, comptée du point γ, croît donc de 62″ par an. Ce point fait le tour du ciel en vingt et un mille ans.

4° L'inclinaison de l'écliptique sur le plan fixe de 1750 ne peut varier qu'entre 0° et 5°. Et comme l'inclinaison de l'équateur sur ce même plan fixe est à peu près constante, l'obliquité de l'écliptique ne varie que de 18° à 28°.

5° L'axe de rotation de la Terre coïncide avec le plus petit axe d'inertie de notre globe, et n'a jamais dû s'en écarter sensiblement.

La température du sol est due à trois causes : la radiation des divers astres de l'univers stellaire, la radiation du Soleil, le flux de chaleur qui nous vient des couches profondes et par lequel s'opère le lent refroidissement de la Terre. Il en résulte actuellement, pour la surface de la Terre, une température moyenne de 288° (absolue). On peut considérer les deux premières comme constantes pendant une grande partie des périodes géologiques; la quantité de chaleur reçue du Soleil, à diverses époques, ne doit donc varier qu'avec l'excentricité e, et sa répartition entre les climats terrestres ne doit varier qu'avec ω, e et ϖ.

Soit q la chaleur reçue du Soleil dans l'unité de temps, à la dis-

tance a; $q\dfrac{a^2}{r^2}$ sera la chaleur reçue à la distance r, et

$$\int_0^{\mathrm{T}} q\,\frac{a^2}{r^2}\,dt$$

sera la chaleur reçue en un an. En vertu de l'équation

$$r^2\,dv = a^2\sqrt{1-e^2}\,n\,dt,$$

cette intégrale revient à

$$\int_0^{2\pi} q\,\frac{dv}{n\sqrt{1-e^2}} = q\,\frac{2\pi}{n\sqrt{1-e^2}} = \frac{q\mathrm{T}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

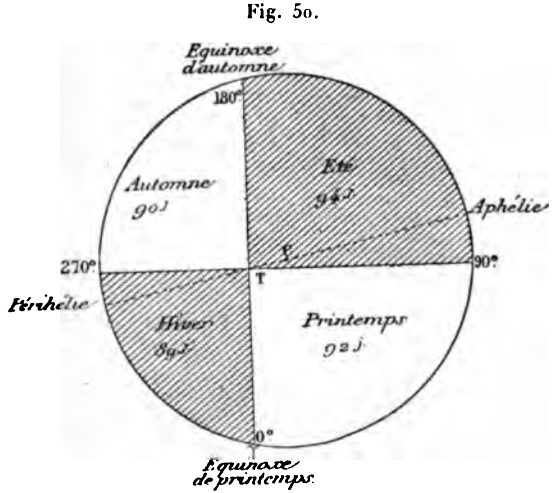
L'excentricité e restant toujours comprise entre 0 et 0,077, la variation de cette quantité de chaleur ne saurait dépasser $\frac{3}{1000}$. Ainsi, pendant tout le temps que la chaleur solaire aura été constante, la température moyenne de la surface terrestre ne saurait avoir varié de 1°, en admettant que toute la chaleur lui vienne du Soleil. Il ne paraît donc pas que les périodes glaciaires, même en supposant qu'elles se soient étendues à tout le globe, puissent être attribuées à une cause astronomique de ce genre ([1]).

Quant aux saisons, c'est-à-dire à la distribution de la chaleur sur les deux hémisphères, elles dépendent de ω, de e et de ϖ. L'obliquité variant de 18° à 28° dans la suite indéfinie du temps, les calottes polaires ont eu et auront une extension variable entre ces limites; de même pour les zones tempérées et torrides. L'autre cause consiste en ce que le mouvement du périgée, par rapport au point γ, transporte successivement le périgée dans les quatre secteurs angulairement égaux qui répondent aux diverses saisons. Actuellement sa longitude est 281°; il tombe dans le secteur 270°-360°, qui répond pour nous à l'hiver. Ce secteur est donc parcouru par le rayon vecteur en moins de temps que celui de 90°-180°, où se trouve l'apogée et qui répond à notre été. C'est une différence de cinq jours entre la durée de l'hiver (89j) et celle de l'été

[1] Nous laissons de côté les variations possibles de la radiation solaire ou stellaire, sur lesquelles nous n'avons aucune donnée.

(94ʲ). En outre, le Soleil est plus proche de nous en hiver qu'en été; la différence est de $\frac{1}{30}$ pour les distances, de $\frac{1}{15}$ pour l'intensité de la chaleur reçue aux moments extrêmes du périgée et de l'apogée. L'hiver et l'été seraient donc plus tempérés sur notre hémisphère que sur l'hémisphère opposé, si les autres circonstances étaient pareilles. Mais le premier est en grande partie continental,

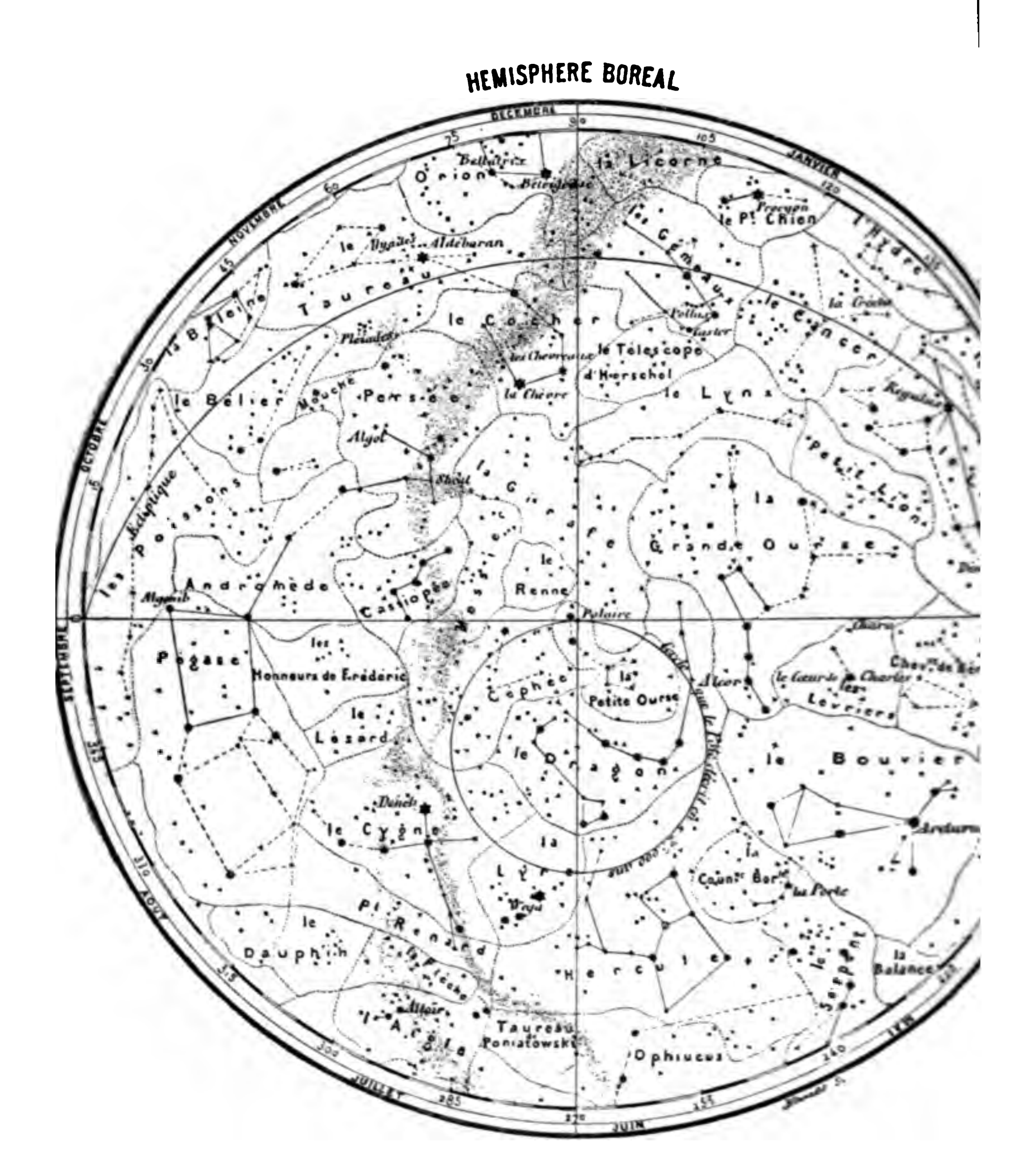
Fig. 50.



et le deuxième en grande partie océanique. Il ne faudrait donc comparer que des pays analogues, tels que le nord et le sud de l'Afrique, ou le nord de l'Afrique avec l'Australie.

Du reste, cet état de choses est assez rapidement variable. Dans 10000 ans, demi-révolution du périgée, ce point tombera dans le secteur d'été, et les choses seront interverties. Alors sans doute, comme aujourd'hui, on ne constatera pas de différence bien sensible entre les températures moyennes des deux hémisphères.

Mais si les causes extérieures, astronomiques, ne paraissent pas avoir une grande influence, il n'en est pas de même de la chaleur centrale. Nous avons vu (Tome I, p. 304) que les grands mouvements qui se sont accomplis peu à peu dans la croûte solidifiée de la Terre proviennent tous du refroidissement qui a dû s'opérer, d'abord avec moins de lenteur qu'aujourd'hui, mais toujours plus énergiquement sous les mers que sur les continents.


HEMISPHERE BOREAL
DECEMBRE
JANVIER
NOVEMBRE
OCTOBRE
SEPTEMBRE
AOUT
JUILLET
JUIN
Orion
Bellatrix
Bételgeuse
la Licorne
Procyon
le Pt Chien
l'Hydre
les Gémeaux
Pollux
Castor
le Cancer
la Crèche
Régulus
le Lion
Petit Lion
les Hyades
Aldébaran
Taureau
la Baleine
Pléiades
le Cocher
les Chevreaux
la Chèvre
le Télescope d'Herschel
le Lynx
le Bélier
Mouche
Persée
Algol
Alcor
l'Ecliptique
les Poissons
la Girafe
la Grande Ourse
le Renne
Andromède
Algenib
Cassiopée
Polaire
Pégase
les Honneurs de Frédéric
Céphée
la Petite Ourse
le Cœur de Charles
les Lévriers
le Lézard
le Dragon
le Bouvier
Arcturus
Deneb
le Cygne
la Lyre
Véga
Couront Bor.
le Dauphin
Pt Renard
la Flèche
Hercule
le Serpent
la Balance
Altaïr
l'Aigle
Taureau Poniatowski
Ophiucus


HEMISPHERE AUSTRAL
la Licorne
Orion
le Lièvre
le Sceptre de Brandebourg
la Harpe de Georges
Hydre
Boussole
le Loch
le Navire
Machine Pneumatique
le Chevalet du Peintre
la Colombe
l'Eridan
Burin
le Fourneau Chimique
la Dorade
l'Horloge
la Machine Electrique
la Baleine
le Poisson Volant
le Réticule
Rhomb.
Chêne de Charles II
le Centaure
Achernar
le Phénix
l'Atelier du Sculpteur
Cr. du Sud
Octant
le Toucan
la Grue
le Vaisseau
le Paon
l'Indien
Poisson Austral
Compas
l'Autel
l'Aérostat
Microscope
le Loup
le Télescope
Cour. Australe
le Sagittaire
le Capricorne
le Scorpion
la Balance
Ecliptique
Ophiucus
Ecu de Sobieski
le Serpent
Antinoüs
Mira
DÉCEMBRE
JANVIER
NOVEMBRE
OCTOBRE
SEPTEMBRE
AOUT
JUILLET
JUIN
MAI

Influence de la précession sur l'aspect du ciel étoilé.

On a marqué, sur la Carte céleste ci-jointe, le cercle de 23°28′ de rayon que le pôle décrit en 26000 ans autour du pôle de l'écliptique, dans le sens rétrograde. Ce pôle est actuellement très près de α petite Ourse, étoile de 2ᵉ grandeur qui joue, à cause de cela, le rôle d'étoile polaire, rôle important à toute époque pour l'orientation. Il continuera à s'en rapprocher jusqu'à la distance de 28′; puis il s'en éloignera progressivement. Dans 12000 ans ce sera Véga (α de la Lyre) qui sera l'étoile polaire. Il y a 4000 ans, à l'époque qu'on assigne vulgairement pour la construction de la grande Pyramide, l'étoile polaire était α du Dragon.

En un lieu donné, l'aspect du ciel change donc peu à peu par l'effet de la précession. Toute étoile cesse d'être visible lorsque sa distance zénithale méridienne $\delta - \lambda$ dépasse 90°,5. Sur l'horizon de Paris, les étoiles dont la distance polaire dépasse 131°40′ se trouvent dans ce cas. La colatitude λ étant invariable, il est aisé de voir sur la Carte que Sirius, et même une partie de la constellation d'Orion, étaient invisibles à Paris il y a 12000 ans. En revanche, d'autres étoiles du ciel austral, que nous ne voyons plus aujourd'hui, paraissaient alors sur notre horizon.

Effets de la précession sur les signes du Zodiaque.

Les Anciens avaient divisé l'écliptique, route du Soleil, en 12 parties égales nommées *signes*. Le signe valait 30° et constituait une première subdivision de la circonférence. Chaque signe portait un nom propre et un symbole, absolument comme la rose des vents. Encore au commencement de ce siècle, on disait que telle planète se trouvait par 23° du signe du Scorpion, ♏ 23°, pour dire que sa longitude était de 233°. Encore aujourd'hui, la *Connaissance des Temps* donne la nomenclature de cette numération pour faciliter la lecture des anciens documents. Pour parler aux yeux, les Anciens avaient affecté une constellation à chaque signe, en groupant sous la figure d'un animal les étoiles zodiacales comprises dans les premiers 30 degrés, puis dans la seconde trentaine et ainsi de suite. Le premier point du Bélier s'écrivait ainsi ♈0°.

et comme c'est encore aujourd'hui l'origine de nos longitudes, on a remplacé ce symbole par la lettre grecque γ, qui lui ressemble le plus. Mais lorsque les anciens astronomes grecs établirent cette division et ces signes, ils ne se doutaient pas que la précession viendrait déranger leur correspondance avec les constellations.

Aujourd'hui, quand le Soleil a passé au point γ et se meut dans le signe ♈ (Bélier), il se trouve réellement dans la constellation des Poissons (*fig.* 51). C'est que la division du zodiaque en Bélier (0° — 30°), Taureau (30° — 60°), Gémeaux (60° — 90°), etc., a été conservée, bien que les étoiles qui s'y trouvaient à l'origine s'en soient peu à peu écartées en passant d'un signe à l'autre.

Quant aux Chinois, qui avaient divisé le ciel en 28 fuseaux compris entre les méridiens de certaines étoiles, dites *déterminatrices,* la confusion a été bien plus grande chez eux, parce que la précession est bien autrement compliquée en Æ qu'en L. Ces étoiles déterminatrices passaient, avec le temps, d'un fuseau dans l'autre; les méridiens limites s'enchevêtraient d'étrange façon; il était impossible d'y rien comprendre, et l'on en était réduit à recommencer de temps à autre la détermination des heures, devenues fort inégales, qui répondaient à chaque étoile déterminatrice.

Application à la Chronologie.

Si les anciens Égyptiens, qui ont si souvent figuré certaines constellations et même des zodiaques entiers sur les parois de leurs temples, avaient eu l'intention de représenter exactement le ciel de leur temps avec l'indication nette des points équinoxiaux ou solsticiaux, il serait aisé d'en conclure la date de la construction de l'édifice, car la précession fait rétrograder de 1° par 72 ans la position de ces points par rapport aux étoiles. Tel serait le célèbre zodiaque de Dendérah que l'armée d'Égypte a fait connaître au monde savant et sur lequel les chronologistes ont si longtemps disserté. Malheureusement il paraît que ces zodiaques ne sont que des processions de personnages allégoriques sans rapport direct avec l'état du ciel de l'époque.

En revanche, l'orientation des monuments égyptiens, dont on

a constaté l'exactitude actuelle, montre que, si les pôles déplacent sur le ciel et voyagent de constellations en constel tions, ils restent toujours aux mêmes points sur la Terre, en so que le globe terrestre a toujours fait corps pour ainsi dire av son axe de rotation.

CHAPITRE XXVIII.

ABERRATION.

Origine de ce mot.

Lorsque Picard et Auzout imaginèrent, dans la seconde moitié du XVII[e] siècle, d'adapter des réticules aux lunettes dont on ne s'était servi avant eux que pour examiner la figure des astres, et de remplacer les alidades à pinnules des instruments de mesure par des nettes à réticule, les observations astronomiques acquirent tout coup une précision telle, que l'on conçut l'espoir de vérifier rectement la doctrine copernicienne, en mesurant sur le ciel les tites ellipses parallactiques des étoiles. Les équations (1), (2), (3) la page 78 donnent $L_1 - L$ pour une étoile dont les coordonnées les seraient L et β; en nommant D la distance de l'étoile, quation (4) se réduit, à cause de la petitesse de ce déplacement, à

$$\sin\beta\,(L_1 - L) = \frac{R}{D}\sin(\odot - L).$$

On aurait de même

$$\beta_1 - \beta = -\frac{R}{D}\cos(\odot - L)\cos\beta \quad (^1).$$

Prenons, dans un plan tangent à la sphère céleste, des axes rec-

(1) En effet, l'équation (4) se réduit, en remplaçant $\cos(L_1 - L)$ par l'unité, à

$$D_1 \sin\beta_1 = D\sin\beta + R\cos(\odot - L).$$

En la combinant avec l'équation (1) on trouve

$$\tang(\beta_1 - \beta) = -\frac{\frac{R}{D}\cos(\odot - L)\cos\beta}{1 - \frac{R}{D}\cos(\odot - L)\sin\beta}.$$

tangulaires se croisant au lieu vrai de l'étoile et dirigeons l'axe des y vers le pôle de l'écliptique; les coordonnées de la position apparente de l'étoile seront, en faisant $\frac{R}{D} = \sin\pi$,

$$x = \sin\beta\,(L_1 - L) = \pi \sin(\odot - L),$$
$$y = \beta_1 - \beta = -\pi\cos(\odot - L)\cos\beta,$$

d'où, en éliminant $\odot - L$,

$$\frac{y^2}{(\pi\cos\beta)^2} + \frac{x^2}{\pi^2} = 1,$$

équation d'une ellipse dont le demi-petit axe $\pi\cos\beta$ est dirigé vers le pôle de l'écliptique, et dont le demi-grand axe π est parallèle à ce cercle.

D'après cela, si les étoiles étaient toutes à la même distance de la Terre, comme le croyaient les Anciens qui les fixaient dans la concavité du dernier ciel, elles décriraient en un an (période de l'argument $\odot - L$) des ellipses ayant même grand axe π, et dont le petit axe décroîtrait, d'une étoile à l'autre, en raison de $\cos\beta$.

Chose remarquable, les astronomes de cette époque trouvèrent bien que les étoiles décrivaient ainsi chaque année des ellipses de ce genre (t. I, p. 191); ces ellipses avaient toutes 20″,4 pour demi-axe parallèle à l'écliptique, et 20″,4 $\cos\beta$ pour demi-axe perpendiculaire au premier; mais leur mouvement sur cette ellipse différait totalement des lois précédentes. Ainsi, au moment où $\odot - L = 90°$, on aurait dû avoir $y = 0$, $x = \pi$. Au lieu de cela on trouvait chaque année

$$y = -20'' \cos\beta, \quad x = 0.$$

Lorsque le Soleil avait même longitude que l'étoile, au lieu de trouver $y = -\pi\cos\beta$, $x = 0$, les observations donnaient

$$y = 0, \quad x = 20'',$$

absolument comme si les formules étaient

$$\sin\beta\,(L_1 - L) = -\pi\cos(\odot - L),$$
$$\beta_1 - \beta = \pi\sin(\odot - L)\cos\beta.$$

Cette contradiction frappante entre la théorie et l'observation ne devait pas entamer la confiance qu'on avait dès lors dans le système de Copernic; en attendant qu'elle fût levée, on donna à ce phénomène mystérieux le nom d'*aberration des fixes*.

Vitesse de la lumière par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter.

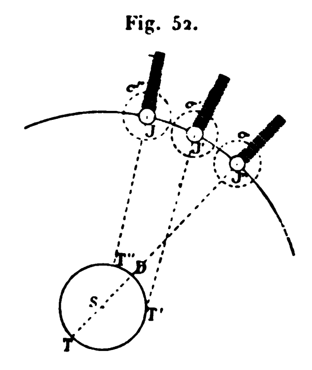
Heureusement qu'une autre difficulté, en apparence de nature toute différente, se présenta à la même époque. Galilée avait appelé l'attention des astronomes sur les éclipses fréquentes des satellites de Jupiter, qui traversent le cône d'ombre de la planète presque à chacune de leurs révolutions. Si l'on faisait des Tables exactes des mouvements de ces satellites, de manière à prédire d'avance leurs éclipses en temps d'un premier méridien, celui de Paris par exemple, l'observation de ces phénomènes, en un lieu quelconque, faite à l'heure du lieu, résoudrait immédiatement et sans calcul le problème de trouver la longitude, dont la solution était de plus en plus réclamée par les géographes et les navigateurs. Cassini avait construit ces Tables en tenant compte de l'équation du centre de la planète, et de quelques inégalités dont une observation suivie lui avait révélé l'existence dans les mouvements des quatre satellites, inégalités que Laplace devait rattacher, un siècle après, à la théorie de l'attraction.

En comparant ces Tables aux observations des éclipses, Rœmer remarqua une inégalité singulière qui avait échappé à Cassini. Dans le cours d'une année à peu près, Jupiter se trouve deux fois en quadrature, à égale distance de la Terre et du Soleil; alors les dates observées des éclipses s'accordaient avec les Tables de Cassini. Mais aux oppositions, l'observateur étant plus voisin de Jupiter de près d'un rayon de l'orbite terrestre, c'est-à-dire de 37 millions de lieues, les éclipses des satellites arrivaient huit minutes avant l'instant prédit. Non loin de la conjonction, au contraire, la Terre étant plus éloignée de Jupiter de tout un rayon de notre orbite, les éclipses arrivaient huit minutes trop tard. Rœmer prouva en outre que, dans l'intervalle, l'avance ou le retard des éclipses sur le calcul variait proportionnellement à la distance de l'observateur à Jupiter. Comme il était impossible

d'admettre que la distance de ces satellites à nous eût la moindre influence sur leurs mouvements, Rœmer chercha et trouva la cause de cette inégalité dans la propagation successive de la lumière, qui devait mettre, d'après cela, seize minutes à parcourir le diamètre entier de l'orbite de la Terre.

Soient W la vitesse de la lumière, que nous supposerons parfaitement uniforme, D la distance d'un astre; tout phénomène qui se produira sur cet astre à l'instant t ne sera perçu, par l'observateur terrestre, qu'à la date $t+\frac{D}{W}$, ce dernier terme exprimant le temps

Fig. 52.



que la lumière met à franchir la distance D. Par conséquent si, à la date inconnue t, un satellite σ (*fig.* 52) s'éclipse en pénétrant dans le cône d'ombre de Jupiter, nous ne verrons le phénomène qu'à l'instant

$$\theta = t + \frac{T\sigma}{W}.$$

Six mois après la Terre se trouvera en T', Jupiter en J'; le retard sera $\frac{T'\sigma'}{W}$, et on aura, pour une nouvelle éclipse,

$$\theta' = t' + \frac{T'\sigma'}{W}.$$

Par conséquent

$$\theta' - \theta = t' - t + \frac{T'\sigma' - T\sigma}{W}.$$

Or l'intervalle $t' - t$ des dates inconnues t et t' comprend un nombre entier de révolutions synodiques de ce satellite, périodes

bien déterminées par Cassini. Cet intervalle est donc aisé à calculer et l'équation précédente donnera W. Le numérateur étant connu en parties de l'unité de distance a, on a tiré de cette équation

$$W = \frac{a}{497^s,8} \quad (^1);$$

en sorte que la lumière met $8^m 17^s,8$ à franchir l'intervalle qui nous sépare du Soleil.

Effets astronomiques de la propagation successive de la lumière.

Ainsi, quand nous voyons un astre dans une certaine direction, c'est par un rayon de lumière qui en est parti quelque temps auparavant. Pendant ce temps, si l'astre est ou semble animé d'un mouvement quelconque, il a dû faire du chemin et arriver en un point d'où le rayon de lumière lancé vers nous ne nous atteindra que plus tard. Si D est la distance de l'astre, $\frac{D}{W}$ sera la valeur de ce temps, et, en désignant par n la vitesse angulaire de l'astre mobile, $n\frac{D}{W}$ sera le chemin parcouru pendant le temps que la lumière aura mis à venir jusqu'à nous.

Le Soleil, par exemple, dont la vitesse angulaire $= 3548'',19$ par jour, sera en avance de la direction où nous le voyons de $3548'',19\frac{D}{W}$; en faisant $D = a$, $W = \frac{a}{497,8}$, l'avance sera de $\frac{3548'',19}{86400} \times 497,8 = 20'',45$ à peu près.

Ainsi le Soleil, tel que nous le voyons de la Terre, est toujours en arrière de $20'',45$ sur sa position réelle. Il faut donc ajouter ces $20'',45$ à la longitude observée pour avoir la vraie longitude, c'est-à-dire la direction suivant laquelle s'exerce leur attraction mutuelle dont la propagation est instantanée.

---

(1) En réalité Delambre a trouvé par ce procédé 493^s; dans ces dernières années, M. Glasenap a trouvé 499^s. Nous adoptons ici un nombre qui répond exactement à la constante de l'aberration des étoiles déterminée par W. Struve. On verra plus loin la relation qui permet de conclure de l'un à l'autre.

Il en sera de même des planètes de notre système. Il convient désormais de distinguer leur position apparente de leur vrai lieu. On obtiendra celui-ci en ajoutant, aux coordonnées apparentes, les arcs décrits pendant le temps $\frac{D}{W}$ que la lumière met à franchir leur distance D, c'est-à-dire

$$\frac{D}{W}\frac{d\mathcal{R}}{dt}, \quad \frac{D}{W}\frac{d\delta}{dt},$$

$\frac{d\mathcal{R}}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ représentant les vitesses en $\mathcal{R}$ et en δ. On peut aussi considérer les coordonnées apparentes à la date t comme les coordonnées réelles, à la condition de retrancher de t le temps $\frac{D}{W}$ que met la lumière à venir jusqu'à nous, et de considérer $t - \frac{D}{W}$ comme la date à laquelle doivent se rapporter lesdites coordonnées.

Aberration des fixes expliquée par Bradley.

Mais quand il s'agit des fixes, le même raisonnement semblait inapplicable.

Revenons maintenant à un phénomène que présentent les étoiles lorsqu'on les observe jour par jour dans tout le cours d'une année. Nous avons vu (t. I, p. 191) qu'elles ont un déplacement réel ou apparent qui doit dépendre, mais d'une manière inexpliquée, du mouvement de la Terre; elles décrivent chaque année, autour de leur position moyenne, une petite ellipse tout à fait différente de l'ellipse parallactique qui, définitivement, échappait par sa petitesse aux efforts des observateurs. Pour l'étoile γ du Dragon, par exemple, les variations de la coordonnée δ étaient

$$\delta - \delta' = 20'' \sin(\odot + 11°),$$

tandis que celles de la parallaxe auraient eu pour expression

$$\delta - \delta' = -\pi \cos(\odot + 11°).$$

En étudiant ces mouvements avec le plus grand soin sur γ du Dragon, Bradley avait été frappé de ce coefficient 20″ qui rappelait

un nombre bien connu des astronomes depuis la découverte de Rœmer, à savoir l'avance du Soleil sur sa position apparente, causée par la propagation successive de la lumière. Le célèbre astronome anglais remarqua que ce nombre exprimait au fond, sous une forme singulière, le rapport des vitesses de la Terre et de la lumière; car dire que, dans le temps que la lumière parcourt le rayon de l'orbite terrestre, le Soleil, ou plutôt la Terre, décrit un arc de $20'',445$ ou, en parties de ce même rayon pris pour unité, $\frac{20'',445}{206265''} = \frac{1}{10091}$, c'est dire que la lumière va 10091 fois plus vite que la Terre. Mais comment la vitesse de la Terre peut-elle nous faire voir les fixes ailleurs qu'ils ne sont? On raconte que Bradley, préoccupé de cette question, et se promenant un jour sur les bords de la Tamise, fut frappé de voir que les girouettes des navires en marche n'étaient pas orientées sous l'action du vent comme celles des navires à l'ancre. Il y avait là une combinaison évidente de la vitesse des navires avec celle du vent. La direction des girouettes en marche devait être la résultante de ces deux vitesses. C'était un phénomène semblable à celui qu'éprouve une personne qui, pour s'abriter d'une pluie tombant verticalement, place son parapluie au-dessus de sa tête si elle est en repos, tandis que, si elle se met à courir, elle doit obliquer son parapluie suivant la résultante des deux vitesses, celle de la pluie et celle de sa course.

Cette remarque lui suggéra l'idée de composer aussi la vitesse de translation de l'observateur terrestre avec celle de la lumière qui lui vient d'une étoile.

Soient E un point fixe quelconque (*fig.* 53), T la Terre, ET le rayon de lumière qui parvient en T, $TT' = V$ la vitesse de la Terre, $eT = W$ celle de la lumière. La résultante sera la diagonale du parallélogramme Te' construit sur Te et TT'; ce sera donc aussi la direction suivant laquelle le rayon de lumière produira sur l'observateur l'impression lumineuse. Celui-ci verra le point E en E', sur le prolongement de Te'. E paraîtra donc dévié d'un angle α dont il est facile d'avoir l'expression, en représentant par σ l'angle $e'TT'$. En effet,

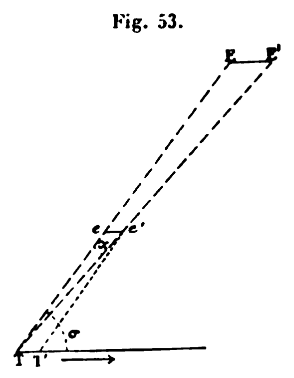
$$\frac{TT'}{eT} = \frac{\sin\alpha}{\sin\sigma} = \frac{V}{W} = \frac{1}{10091},$$

ou, en angle,

$$\alpha = \frac{206\,265''}{10091} \sin\sigma = 20'',445 \sin\sigma.$$

Ainsi tous les points de l'univers, les fixes par conséquent, doivent paraître déviés d'un petit angle $\alpha = 20'',445 \sin\sigma$ dans le sens vers lequel la Terre marche. Le point E, ou l'étoile fixe, est vu en E', et l'on construira graphiquement la position apparente E' en menant par E (position vraie) une droite EE' parallèle au mouvement de la Terre et égale à $\frac{1}{10091}$ de TE, c'est-à-dire de la distance de

Fig. 53.



l'étoile à la Terre. Et comme d'un bout à l'autre de l'année la vitesse de la Terre a pris toutes les directions dans l'écliptique (on peut ici la supposer constante), le point apparent E' décrira autour de E, dans un plan parallèle à celui de l'écliptique, un cercle analogue à celui de l'orbite de la Terre, sauf que le rayon EE', étant le $\frac{1}{10091}$ de la distance, ne sous-tendra, à l'œil de l'observateur, qu'un angle de $20'',445$.

Ce cercle, projeté sur la voûte céleste avec laquelle son plan fait un angle β égal à la distance angulaire de l'étoile E au pôle de l'écliptique, devient une petite ellipse dont le demi-grand axe parallèle au plan de l'écliptique est $20'',445$, et dont le demi-petit axe est $20'',445 \cos\beta$.

Après avoir calculé sur ces données la variation annuelle correspondante en δ pour γ du Dragon, Bradley eut la satisfaction de retrouver l'expression

$$\delta - \delta' = 20'' \sin(\odot + 11^\circ)$$

que les observations lui avaient donnée (t. I, p. 191) par une voie purement empirique et dont il possédait désormais la signification.

Expression théorique de l'aberration.

Soient x, y, z les coordonnées écliptiques vraies de l'étoile E à l'époque t, rapportées à la Terre, D sa distance, x_1, y_1, z_1 ses coordonnées apparentes, c'est-à-dire celles du point E'; ξ, η les coordonnées du Soleil; $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ les composantes de la vitesse du Soleil dans son orbite, ce qui donne $-\frac{d\xi}{dt}$, $-\frac{d\eta}{dt}$ pour celles de la Terre. Nous aurons, pour les projections de la ligne EE' sur les axes,

$$-\frac{d\xi}{dt}\frac{W}{D}, \quad -\frac{d\eta}{dt}\frac{D}{W}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} z_1 &= z, \\ x_1 &= x + \xi - \frac{d\xi}{dt}\frac{W}{D}, \\ y_1 &= y + \eta - \frac{d\eta}{dt}\frac{W}{D}; \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$\xi = R\cos\odot, \quad \eta = R\sin\odot,$$

et, par la page 66,

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\sin\odot, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\cos\odot,$$

en n'écrivant pas les termes constants en $e\sin\varpi$ et $e\cos\varpi$, qui se confondront avec les constantes x et y. Posons

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\,W} = \alpha,$$

et remplaçons les coordonnées rectilignes par les sphériques; il viendra

$$\begin{aligned} D_1\cos\beta_1 &= D\cos\beta, \\ D_1\sin\beta_1\cos L_1 &= D\sin\beta\cos L + R\cos\odot + \alpha D\sin\odot, \\ D_1\sin\beta_1\sin L_1 &= D\sin\beta\sin L + R\sin\odot - \alpha D\cos\odot. \end{aligned}$$

On en déduira $\operatorname{tang}(L_1 - L)$ et $\operatorname{tang}(\beta_1 - \beta)$, et, comme les termes du second ordre en $\pi = \frac{R}{D}$ et en α sont parfaitement négligeables, on écrira

$$\begin{aligned}(L_1 - L)\sin\beta &= \pi\sin(\odot - L) - \alpha\cos(\odot - L),\\ \beta_1 - \beta &= \pi\cos\beta\cos(\odot - L) + \alpha\cos\beta\sin(\odot - L).\end{aligned}$$

Les termes en π représentent la parallaxe annuelle; les termes en α l'aberration. Ainsi on passe des premiers aux seconds en remplaçant la petite parallaxe π, variable d'une étoile à l'autre, par α, et $\odot$ par $\odot - 90^\circ$. Sur l'ellipse parallactique, on voit l'étoile déplacée dans la direction même où se trouve le Soleil; sur l'ellipse d'aberration, on la voit déplacée dans une direction de 90° moins avancée que le Soleil.

Aberration pour les coordonnées équatoriales.

Si les coordonnées étaient rapportées à l'équateur, nous aurions

$$\begin{aligned}D_1\cos\delta_1 &= D\cos\delta + R\sin\omega\sin\odot - \alpha D\sin\omega\cos\odot,\\ D_1\sin\delta_1\cos\mathcal{R}_1 &= D\sin\delta\cos\mathcal{R} - R\cos\odot + \alpha D\sin\odot,\\ D_1\sin\delta_1\sin\mathcal{R}_1 &= D\sin\delta\sin\mathcal{R} - R\cos\omega\sin\odot - \alpha D\cos\omega\cos\odot,\end{aligned}$$

d'où l'on déduira, en se bornant à l'aberration,

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R})\sin\delta &= -\alpha(\cos\odot\cos\mathcal{R}\cos\omega + \sin\odot\sin\mathcal{R}),\\ \delta_1 - \delta &= -\alpha\cos\odot(\sin\mathcal{R}\cos\delta\cos\omega - \sin\delta\sin\omega)\\ &\quad + \alpha\sin\odot\cos\mathcal{R}\cos\delta.\end{aligned}$$

C'est en posant

$$\begin{aligned}\sin\mathcal{R}\cos\delta\cos\omega - \sin\delta\sin\omega &= m\sin M,\\ \cos\mathcal{R}\cos\delta &= m\cos M\end{aligned}$$

que nous avons retrouvé $\delta_1 - \delta$ sous la forme de la page 191 du tome I :

$$\alpha m\sin(\odot - M).$$

Aberration diurne.

Tout mouvement de l'observateur donne lieu, pour un point quelconque de l'univers, à une aberration spéciale. Le mouvement diurne n'est pas absolument négligeable sous ce rapport. Désignons cette fois par ζ, ξ, η les coordonnées équatoriales de l'observateur à la surface du globe, à l'heure sidérale H; nous aurons

$$\zeta = \rho \cos \lambda, \quad \xi = \rho \sin \lambda \cos \mathrm{H}, \quad \eta = \rho \sin \mathrm{H}.$$

Leurs variations avec le temps seront

$$d\zeta = 0.$$
$$\frac{d\xi}{dt} = -\rho \sin\lambda \sin \mathrm{H} \frac{d\mathrm{H}}{dt},$$
$$\frac{d\eta}{dt} = +\rho \sin\lambda \cos \mathrm{H} \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

Portez-les dans les équations précédentes et vous obtiendrez

$$\sin\delta(Æ_1 - Æ) = \frac{1}{\mathrm{W}} \frac{d\mathrm{H}}{dt} \rho \sin\lambda \cos(\mathrm{H} - Æ),$$
$$\delta_1 - \delta = -\frac{1}{\mathrm{W}} \frac{d\mathrm{H}}{dt} \rho \sin\lambda \sin(\mathrm{H} - Æ) \cos\delta.$$

Comme $\mathrm{H} - Æ = Æ\!\!\mathrm{H}$, on voit que l'aberration diurne est au maximum en Æ quand l'étoile passe au méridien; elle est nulle alors en δ. La vitesse angulaire $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$ de la rotation terrestre est 366,25 fois plus grande que celle de la circulation de la Terre autour du Soleil, mais le rayon $\rho \sin \lambda$ du petit cercle décrit par l'observateur autour de l'axe polaire est bien plus petit que le rayon a de l'orbite terrestre. On aura donc la constante de l'aberration diurne en multipliant 20″,445 par 366,256 et par $\frac{\rho}{a}$ ou $\sin\pi = \sin 8'',813$. De là la valeur 0″,32 pour ce coefficient.

On en tient compte dans la réduction des observations méridiennes en ajoutant la constante $0'',32 \sin\lambda$ à l'erreur de collimation c, car toutes deux doivent avoir le facteur $\frac{1}{\sin\delta}$ à la distance polaire δ.

Aberration en longitude du Soleil.

La variation $d\odot$ de la longitude du Soleil a pour expression (p. 46)

$$d\odot = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1+e\cos v)^2\, n\, dt,$$

dans laquelle

$$v = \odot - \varpi.$$

En remplaçant dt par le petit intervalle de temps

$$\frac{R}{W} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos v)W},$$

nous aurons la formule complète de l'aberration

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\,W}[1+e\cos(\odot-\varpi)].$$

Cette expression revient à $\frac{V}{W}$; la vitesse V de la Terre est une quantité légèrement variable dont la partie constante est $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$ (¹). En prenant la seconde pour unité de temps, on a

$$W = \frac{a}{497,78}, \quad n = \frac{59'0'',19}{86400};$$

d'autre part, $e = 0,01677$. De là, le petit calcul suivant pour la

(¹) En effet, dans la relation $V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$ remplacez μ par $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = a^2 n^2$, r par $\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$; vous trouvez

$$V = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v).$$

partie constante de l'aberration du Soleil en longitude :

$$\begin{array}{rl} \log 3548'',19\ldots & 3,55001 \\ C^t \log 86400\ldots\ldots & 5,06349-10 \\ C^t \log \sqrt{1-e^2}\ldots. & 0,00006 \\ \log 497,78\ldots\ldots & 2,69703 \\ \hline & 1,31059 = \log 20'',445 = \log \text{arc} \sin \frac{V}{W}. \end{array}$$

Détermination par les étoiles de la constante de l'aberration.

Il suffisait à la rigueur de comparer les coordonnées d'une étoile observée au méridien aux époques où l'aberration atteint ses effets maxima, en sens contraire, c'est-à-dire à six mois d'intervalle. Après avoir corrigé ces observations des effets de la précession, de la nutation et du mouvement propre, il n'y reste plus que ceux de l'aberration, qu'il est aisé d'en déduire. On choisit pour cela une étoile circumpolaire, α de la petite Ourse, par exemple. Il vaut mieux employer toutes les observations méridiennes d'une année, et former des équations de condition où figurent comme inconnues la parallaxe π et la petite correction à ajouter à une valeur provisoire de l'aberration. Les Æ fournissent une série d'équations pareilles; les δ en donnent une autre série indépendante de la première. Cependant il est préférable d'instituer des observations spéciales pour cet objet, comme l'ont fait autrefois Hooke, Molineux, Bradley, à l'aide de grands secteurs zénithaux. M. W. Struve, de Poulkowa, a eu recours à une méthode fort remarquable basée sur l'emploi d'une lunette semblable à la lunette méridienne, mais tournant dans un plan vertical perpendiculaire au méridien. En observant les deux passages, par ce plan, d'une étoile dont le $\delta > \lambda$, aux heures H et H', on a, pour l'angle horaire, à l'instant d'un de ces passages, $Æ = \frac{H'-H}{2}$ et l'on en déduit δ par la relation (triangle rectangle PZE)

$$\tang \delta = \tang \lambda \cos Æ.$$

On suppose λ connu. La réfraction n'intervient pas ici, non plus que les erreurs de division d'un cercle ou d'un secteur et les dila-

tations des vis micrométriques. En différentiant, on a

$$\frac{d\delta}{\sin\delta\cos\delta} = -d\mathcal{H}\tang\mathcal{H};$$

par conséquent, si l'on choisit des étoiles dont le δ dépasse peu le λ local, tang$\mathcal{H}$ sera petit, et ce facteur diminuera l'influence des erreurs de l'observation de H ou de H', c'est-à-dire de $\mathcal{H}$. Cette méthode, due originairement à Rœmer, a été tirée de l'oubli par Bessel, qui l'a appliquée à la mesure des colatitudes λ dans ses opérations géodésiques. M. W. Struve a fait construire un instrument spécial pour observer ainsi, avec une exactitude remarquable, une nombreuse série d'étoiles culminant près de son zénith. De la discussion des δ ainsi obtenus, il a déduit

$$\alpha = 20'',445 \pm 0'',011.$$

Vitesse de la lumière mesurée par les physiciens.

Comme la lumière a une vitesse de 300 millions de mètres par seconde, elle met $\frac{1}{4300}$ de seconde à parcourir 65^{km}. C'est à peu près la plus grande base qu'on puisse choisir dans ces expériences; par conséquent la méthode doit permettre d'apprécier $\frac{1}{4300}$ de seconde avec une grande exactitude. Il y a pour cela deux admirables procédés : celui de M. Fizeau et celui de M. Foucault. Le procédé de M. Fizeau a été appliqué avec un plein succès par M. Cornu. Il consiste à envoyer, par l'intervalle de deux dents d'une roue dentée, un faisceau de lumière parallèle qui va frapper normalement un miroir immobile placé à 32^{km}, et qui revient ainsi à la roue dentée après avoir parcouru 65^{km}. Si l'on imprime à cette roue une grande vitesse de rotation, de 1600 tours par seconde, par exemple, cette roue se sera déplacée très sensiblement pendant ce trajet de la lumière, bien qu'il ne dure que $\frac{1}{4000}$ de seconde; le rayon, à son retour, repassera donc, non par le premier intervalle des dents, mais par un autre, le vingtième ou le vingt-unième par exemple, qui sera venu prendre la place du premier. Si le rayon tombe sur une dent, il y aura éclipse; sur un intervalle il passera. En comptant les éclipses et les réapparitions du faisceau de lumière

qui se produisent successivement, à mesure qu'on augmente la vitesse de rotation, on se rend compte du rang de l'intervalle auquel on s'arrête. Toute la difficulté se réduit à mesurer avec exactitude la vitesse de rotation de la roue.

M. Cornu a trouvé ainsi

$$W = 300400^{km} \pm 1000^{km}.$$

M. Helmert a corrigé un peu ce résultat et l'a réduit à

$$299990^{km}.$$

La méthode de M. Foucault consiste à appliquer le miroir tournant de Wheatstone à la mesure du temps employé par la lumière à parcourir un espace beaucoup plus petit. Elle a été singulièrement perfectionnée dans ces derniers temps par M. Michelson, des États-Unis. Un rayon de lumière, lancé par un miroir tournant, est réfléchi normalement par un second miroir fixe qui le renvoie sur le premier. Le double trajet était, dans les expériences que nous mentionnons, d'environ 1200^m. Le rayon de retour, rencontrant le miroir tournant dans une position nouvelle, est réfléchi vers l'observateur qui mesure la déviation. Celle-ci s'accroît avec la vitesse de rotation, dont il faut connaître exactement la valeur (¹).

Le résultat obtenu par M. Michelson est

$$W = 299940^{km} \pm 100^{km}.$$

Nous adopterons ce second nombre, si bien confirmé par le précédent. Son erreur relative est d'environ $\frac{1}{3000}$.

En rapprochant cette valeur de W de celle qu'on déduit de la constante de Struve par

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}\,W} = 20'',445$$

(¹) On y parvient optiquement à l'aide d'un diapason dont le nombre de vibrations par seconde est connu exactement. Ce diapason porte à l'une de ses branches un petit miroir qui réfléchit une image du miroir tournant. Celle-ci est immobile lorsque le nombre de tours de celui-ci est égal au nombre des vibrations du diapason.

ou encore

$$W = \frac{a}{497^s,78}.$$

On voit que l'on peut en déduire en mètres la distance moyenne a ou, ce qui revient au même, la parallaxe du Soleil. Nous avons trouvé ainsi (p. 221)

$$\pi = 8'',813 \pm 0'',0056.$$

CHAPITRE XXIX.

CATALOGUES D'ÉTOILES.

Réunissons les variations des coordonnées écliptiques dues à la précession, à la nutation et à l'aberration, en nommant

L et β les coordonnées rapportées au point γ moyen et à l'écliptique de 1850;

L_1 et β_1 les coordonnées rapportées au point γ vrai et à l'écliptique de $1850 + t$;

N la longitude moyenne du nœud ascendant de la Lune;

et posons $C\gamma = 8^\circ 32' 31'' + 5'',22\,t$; on aura

$$= L + 50'',2113\,t + 0,000122\,t^2 \ldots\ldots \quad \text{Précession. et var.}$$
$$- 0,489\,t \cot\beta \cos(L + C\gamma) \ldots\ldots \quad \text{séc. de l'écliptique.}$$
$$-17,25 \sin N - 1'',27 \sin 2\odot \ldots\ldots \quad \text{Nutation.}$$
$$-20,445 \,\text{séc}\,\beta \cos(L - \odot) \ldots\ldots \quad \text{Aberration.}$$

$$= \beta - 0,489\,t \sin(L + C\gamma) \ldots\ldots \quad \text{Var. séc. de l'écl.}$$
$$+20,445 \cos\beta \sin(L - \odot) \ldots\ldots \quad \text{Aberration.}$$

En désignant par μ et ν les mouvements propres de l'étoile en L et β, il faut encore ajouter à L le terme μt, et à β le terme νt.

Voici les formules applicables aux coordonnées équatoriales :

$$Æ_1 = Æ + m + n \sin Æ \cot\delta \ldots\ldots \quad \text{Précession.}$$

$$-(15'',81 + 6'',87 \sin Æ \cot\delta) \sin N \ldots\ldots$$
$$- 9'',22 \cos Æ \cot\delta \cos N \ldots\ldots \quad \text{Nutation.}$$
$$-(1,16 + 0,51 \sin Æ \cot\delta) \sin 2\odot \ldots\ldots$$

$$- 20,445 \sin Æ \,\text{séc}\,\delta \sin\odot \ldots\ldots$$
$$- 20,445 \cos Æ \cos\omega \,\text{séc}\,\delta \cos\odot \ldots\ldots \quad \text{Aberration.}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 = \delta &- nt\cos Æ \ldots\ldots && \textbf{Précession.}\\
&- 9'',22 \sin Æ \cos N \ldots\ldots && \\
&- 0,55 \sin Æ \cos 2\odot \ldots\ldots && \textbf{Nutation...}\\
&+ 6,87 \cos Æ \sin N \ldots\ldots && \\
&+ 0,51 \cos Æ \sin 2\odot \ldots\ldots && \\
&+ 20,445 \cos Æ \cos\delta \sin\odot \ldots\ldots && \textbf{Aberration.}\\
&- 20,445 (\sin Æ \cos\delta \cos\omega - \sin\delta \sin\omega)\cos\odot \ldots &&
\end{aligned}$$

Même remarque que ci-dessus pour les mouvements propres en Æ et δ.

Catalogues d'étoiles.

Suivant les usages consacrés en Astronomie on considère le mouvement du point γ comme composé de deux parties : l'une, sensiblement proportionnelle au temps, est la précession générale; l'autre, périodique, est la nutation. Le point γ moyen à la date $1850+t$ résulte donc d'un simple calcul de précession ; la position du point γ vrai résulte de la précession et de la nutation. Quant aux coordonnées apparentes d'une étoile, telles qu'elles seraient données par l'observation, il faudrait encore, pour les obtenir, ajouter aux coordonnées rapportées au point γ vrai l'effet de l'aberration.

Réciproquement, si l'on a observé les coordonnées d'une étoile en $1850 + t$, on n'a que les coordonnées apparentes rapportées au point γ vrai. Si l'on en retranche l'aberration, on obtient les coordonnées vraies rapportées à l'équinoxe vrai du jour de l'observation. Si on retranche les effets de la nutation, on a les coordonnées rapportées au point γ ou à l'équinoxe moyen de $1850 + t$. Enfin si vous en retranchez la précession pour t années, vous aurez les coordonnées moyennes de 1850, c'est-à-dire rapportées à l'équinoxe moyen de cette date [1].

Afin de faciliter les calculs relatifs aux coordonnées équatoriales dont on se sert le plus souvent, on les a mis sous la forme sui-

[1] Ne pas oublier que toutes les corrections, calculées par nos formules ou prises dans les éphémérides, doivent être ajoutées (algébriquement) aux coordonnées moyennes pour passer aux coordonnées vraies, et, quand il s'agit de l'aberration, aux coordonnées vraies pour passer aux coordonnées apparentes. Les éphémérides donnent toujours les coordonnées apparentes des planètes et des étoiles, pour le centre de la Terre.

vante (Bessel). Posons

$$
\begin{aligned}
h \sin \mathrm{H} &= -18'',76 \cos \odot \\
h \cos \mathrm{H} &= -20,45 \sin \odot \\
g \sin \mathrm{G} &= -\ \ 9,22 \cos \mathrm{N} + \ldots \\
g \cos \mathrm{G} &= +20,05\,(t - 0'',34 \sin \mathrm{N}) \\
f &= \ \ 46,09\,(t - 0'',34 \sin \mathrm{N}) \\
i &= -18,76 \operatorname{tang} \omega \cos \odot ;
\end{aligned}
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
Æ_1 &= Æ + f + g \sin(Æ + \mathrm{G}) \cot \delta + h \sin(Æ + \mathrm{G}) \operatorname{coséc} \delta \\
\delta_1 &= \delta \qquad - g \cos(Æ + \mathrm{G}) \qquad - h \cos(Æ + \mathrm{G}) - i \sin \delta .
\end{aligned}
$$

La *Connaissance des Temps* publie, de dix jours en dix jours, les valeurs des quantités f, G, H, g, h et i.

Pour donner une idée de ces catalogues d'étoiles, nous insérons ici le commencement de celui de Baily.

Catalogue de 8370 étoiles de l'Association Britannique.

NOM de l'étoile.	GRANDEUR.	Æ MOYENNE janvier 1, 1850.	PRÉCESSION annuelle.	VARIATION séculaire.	MOUVEMENT propre.	δ MOYENNE janvier 1, 1850.	PRÉCESSION annuelle	VARIATION séculaire	MOUVEMENT propre.
		h m s	s	s	s	° ′ ″	″	″	″
6 Ceti........	7	0.0. 3,06	+3,071	−0,0018	+0,002	93.22.57,4	−20,06	+0,001	−0,08
Sculptoris....	6	0.25,79	3,069	−0,0204	+0,003	124.21.56,9	20,06	0,001	+0,16
5 Ceti........	7	0.31,11	3,070	−0,0017	−0,003	93..6.53,5	20,06	0,001	−0,06
α Andromeda	1	0.38,55	3,073	+0,0161	+0,013	61.44.14,4	20,06	0,001	+0,13
Ceti..........	7	1. 2,01	3,070	−0,0015	+0,006	93. 3.24,6	20,06	0,002	−0,01
Cephei.......	7½	1.10,87	3,106	+0,1554	+0,057	11. 7.13,2	20,06	0,002	+0,08
β Cassiopeæ..	8½	1.12,07	3,082	+0,0488	+0,067	31.40.38,4	20,06	0,002	+0,17
87 Pegasi....	6	1.18,52	3,073	+0,0095	+0,012	72.37.15,8	20,06	0,003	−0,02
Phœnicis	6	1.27,58	3,059	−0,0420	+0,004	144.50.22,3	20,06	0,003	+0,20
Sculptoris....	6	1.41,91	3,065	−0,0163	+0,013	118.49.17,2	20,06	0,003	−0,10
• Phœnicis...	4	1.47,43	3,060	−0,0312	+0,029	136.34.24,7	20,06	0,004	+0,02
....	.	......	.....	......	.....	....	.....	.....	....
Canopus.....	1	6.20.37,46	1,328	−0,0017	+0,012	142.36.56,4	+ 1,80	+0,193	0,00

Pour obtenir la position moyenne d'une de ces étoiles en $1850+t$, il faut, conformément à une prescription de la page 240, calculer la précession annuelle pour l'époque intermédiaire $1850+\frac{1}{2}t$. Elle est égale à la précession annuelle du catalogue $+\frac{\text{variat. séc.}}{100}\times\frac{1}{2}t$. On aura ainsi Æ moyenne, pour $1850+t$, par

$$\text{Æ moy. } 1850 + (\text{préc. ann.} + \text{mouv. prop.})\, t.$$

C'est presque toujours de la position vraie, à la date susdite, que l'on a besoin. Il faudra dès lors prendre dans la *Connaissance des Temps* la valeur des coefficients F, G, H. ... pour la date indiquée, et achever le calcul comme on l'a dit plus haut.

Formation d'un Catalogue d'étoiles.

C'est là un des objets les plus importants de l'activité des grands Observatoires. On y observe chaque année un grand nombre d'étoiles de toute grandeur pour former le Catalogue des positions moyennes de tous ces astres, rapportées au point γ d'une date convenue, époque du Catalogue. Pour cela, on retranche de chaque observation l'aberration et la nutation; puis on compare cette position à celle d'un Catalogue beaucoup plus ancien, afin d'en tirer la précession + le mouvement propre pour le laps de temps écoulé. Cette comparaison fait connaître le mouvement propre. Enfin, par un calcul de précession où l'on tiendra compte de ce nouvel élément, on rapportera l'étoile au γ de l'époque adoptée pour le Catalogue.

C'est en comparant les positions ainsi obtenues à celles que les astronomes ont déterminées antérieurement qu'on obtient la constante de la précession et les mouvements propres en Æ et δ.

La plupart des étoiles présentent en effet des mouvements propres soit réels, soit dus à des erreurs d'observations. L'erreur probable d'un Æ ou d'un δ étant de $1''$ à $2''$, celle des différences $Æ_1 - Æ$, $\delta_1 - \delta$, pour deux étoiles observées à des époques différentes, sera de $1'',4$ à $2'',8$. Si l'intervalle est d'un siècle, l'erreur probable du mouvement propre conclu sera de $0'',01$ à $0'',03$. On trouve un assez bon nombre d'étoiles dont les mouvements propres sont dix et même cent fois plus grands que cette erreur probable. Il

n'y a donc pas à douter de leur réalité et il importe de les étudier.

Outre les erreurs accidentelles de l'observation, ces mouvements propres qu'on est conduit à regarder comme uniformes, du moins dans le court laps de temps qu'embrassent les observations, sont nécessairement affectés de toutes les erreurs constantes des Catalogues. Par exemple, les Æ d'un Catalogue peuvent être trop fortes par suite d'une erreur commise dans la détermination du point γ. Il y a aussi l'erreur propre à la constante de la précession qu'on emploie pour transporter les coordonnées d'un Catalogue à l'époque d'un autre.

Nous ignorons d'ailleurs si les mouvements propres eux-mêmes, abstraction faite de ces causes d'erreur, sont dirigés au hasard, sans loi, ou bien s'ils présentent quelque particularité commune. Il n'est pas impossible en effet que beaucoup d'étoiles appartiennent à quelque système très vaste dont les mouvements intérieurs seraient réguliers.

En second lieu, si le Soleil se meut comme les autres étoiles, nous participons à ce mouvement, et nous le transportons en sens inverse à tous les points de l'univers.

Ce que donnent les mouvements propres des étoiles.

Cette question est capitale; la détermination exacte de la constante de la précession en dépend. Malheureusement sa solution complète exigerait la connaissance de la distance des étoiles, résultat auquel l'Astronomie actuelle ne saurait prétendre. Sir W. Herschel a déterminé le premier la direction du mouvement de translation du système solaire, par un procédé graphique qui n'exige pas les distances (t. I, p. 28); mais le seul astronome qui ait abordé ce problème en son entier est M. O. Struve. Voici un aperçu de son travail et de ses résultats.

Soit une étoile ayant L, β, r pour coordonnées à une époque t, L', β', r' à une époque t'. Désignons par $\mathfrak{L}$ et b les coordonnées du point vers lequel marche le Soleil et e l'espace qu'il a parcouru dans le temps $t' - t$. On aura évidemment, en passant par les coordonnées rectangulaires et en nommant ζ, ξ, η les projections de

la petite droite e sur les axes,

$$z' = z + \zeta,$$
$$x' = x + \xi,$$
$$y' = y + \eta,$$

et par suite, en coordonnées polaires

$$r' \cos\beta' = r\cos\beta + e\cos b,$$
$$r'\sin\beta'\cos L' = r\sin\beta\cos L + e\sin b\cos \mathfrak{L},$$
$$r'\sin\beta'\sin L' = r\sin\beta\sin L + e\sin b\sin\mathfrak{L}.$$

On éliminera l'inconnue $\frac{r'}{r}$ et on aura ainsi pour chaque étoile deux relations entre $\frac{e}{r}$, b, $\mathfrak{L}$. M. Otto Struve, à l'aide de suppositions très plausibles sur les distances r des diverses catégories d'étoiles par lui calculées, a trouvé, en introduisant dans ses équations comme inconnue la correction ε à appliquer à la constante de la précession :

$$\varepsilon = +0'',0134,$$
$$\frac{e}{r} = 0'',339,$$
$$\mathfrak{L} = 255°59' \quad (^1),$$
$$b = 29°21'.$$

La distance r est ici relative aux étoiles de première grandeur; elle vaut à peu près un million de fois la distance a de la Terre au Soleil. L'espace e est donc

$$\frac{0,339}{206265} \times 1000000a.$$

Dans un an la Terre parcourt $2\pi a$. On trouve ainsi que la vitesse de translation du système solaire est le quart de la vitesse de la Terre dans son orbite annuelle.

(1) M. Struve s'est servi des Æ et δ des catalogues sans passer par les L et β. Les formules restent les mêmes, sauf en ce qui concerne la précession. Il a trouvé pour les coordonnées équatoriales du point cherché : Æ = 261°23', δ = 52°24'.

LIVRE VI.

LA LUNE.

L'attraction du Soleil, a et T étant rapportés au mètre et à la seconde comme unités de longueur et de temps, est $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2(\rho)^3}{T^2 \sin^3 \pi'}$. Désignons par μ' cette attraction de la masse solaire à 1^m de distance, et par $\frac{\mu'}{a^2}$ sa valeur à la distance moyenne du Soleil à la Terre. Il est facile de voir qu'elle est 1656 fois plus faible que l'attraction terrestre G à la surface de la Terre, c'est-à-dire à la distance (ρ). Si donc la Terre était fixée dans l'espace, les corps placés à sa surface, du côté du Soleil, perdraient $\frac{1}{1656}$ de leur poids; ils en gagneraient tout autant du côté opposé, et les eaux des océans afflueraient violemment sur l'hémisphère tourné vers le Soleil. Mais la Terre est absolument libre; elle obéit donc tout entière à cette faible attraction comme si sa masse était condensée en son centre (p. 112). Les poids des corps placés à sa surface ne sont altérés qu'en vertu de la différence des attractions que le Soleil exerce sur le centre et sur la surface. Cette différence produit des effets tout autres que ceux que nous venons de décrire. Elle diminue de la même quantité les poids des corps placés du côté du Soleil et de ceux qui se trouvent sur la Terre à l'opposé du Soleil, parce que les premiers sont plus attirés que le centre, tandis que le centre est plus attiré que les seconds. Différentions $\frac{\mu'}{a^2}$ par rapport à a; $\frac{2\mu'}{a^3}da$ exprimera cette force perturbatrice si l'on donne à da la valeur (ρ). Le calcul montre qu'elle n'est, au maximum, que la 19380000e partie de G. On a donc raison de n'en tenir aucun

compte dans les questions de Mécanique ou de Physique terrestres. Elle passerait complètement inaperçue si la surface de niveau des mers ne formait un vaste appareil sensible aux moindres forces, et ne décelait celles-ci par l'imperceptible phénomène des marées. On sait du reste que les marées se produisent également du côté du Soleil et du côté opposé, montrant ainsi que la diminution du poids des corps s'opère effectivement de la même manière sur ces deux faces.

Si on lançait horizontalement, près de la surface de la Terre, un projectile avec une vitesse de 8000^m par seconde, ce corps circulerait indéfiniment autour de notre globe (abstraction faite de la résistance de l'air; il n'éprouverait de la part du Soleil aucune perturbation bien sensible.

Mais, à mesure qu'on s'éloigne de la Terre, à une distance variable ρ, l'attraction de ce globe diminue en raison du carré de la distance ρ, tandis que l'action perturbatrice du Soleil $\frac{2\mu'}{a^3}\rho$ augmente proportionnellement à cette même distance ρ. Le rapport des deux forces varie donc comme ρ^3. Un corps porté à la distance de 60 (ρ), (ρ) étant le rayon équatorial, et participant, bien entendu, au mouvement de la Terre, décrirait, s'il était lancé avec une vitesse double de celle d'un boulet de canon, une orbite identique à celle de la Lune. Mais, pour ce projectile, l'action perturbatrice du Soleil serait déjà $\frac{1}{100}$ de l'attraction terrestre. Enfin, à la distance de $270(\rho)$ environ, ces deux forces seraient égales, et un corps lancé dans ces conditions finirait par circuler autour du Soleil et non autour de la Terre (comparez avec ce qui a été dit pour les comètes, p. 188).

Chaque planète a ainsi une sorte de sphère d'attraction, restreinte par la présence du Soleil, à l'intérieur de laquelle elle peut avoir et conserver des satellites. Si le Soleil venait à disparaître, à être anéanti, chaque planète poursuivrait sa route dans l'espace, avec sa vitesse et dans sa direction actuelles, emportant avec elle ses satellites. Ces petits systèmes seraient à peine atteints par la catastrophe qui dissoudrait le monde solaire.

Si, au lieu de considérer le mouvement du satellite par rapport à la planète, on veut en étudier le mouvement absolu, on trouve que le satellite décrit une épicycloïde autour du Soleil. La nature

de cette courbe dépend du rapport des deux vitesses, celle de la circulation autour de la planète et celle de la circulation du petit système autour du Soleil. Ce rapport est tel, pour la Lune, que son épicycloïde est allongée, sans boucle ni point de rebroussement, en sorte que le mouvement de la Lune, vu du Soleil, est toujours direct ([1]). Il en est de même pour les deuxième, troisième et quatrième satellites de Jupiter. Le premier, au contraire, décrit dans l'espace une épicycloïde à boucles; vu du Soleil, son mouvement offre des parties rétrogrades et des parties directes; il a des stations et des rétrogradations comme les planètes vues de la Terre. Mais nous n'aurons à étudier que le mouvement de la Lune relativement à la Terre.

([1]) Il est facile de montrer que cette épicycloïde décrite par la Lune autour du Soleil n'a même pas de points d'inflexion et présente partout sa concavité au Soleil.

CHAPITRE XXX.

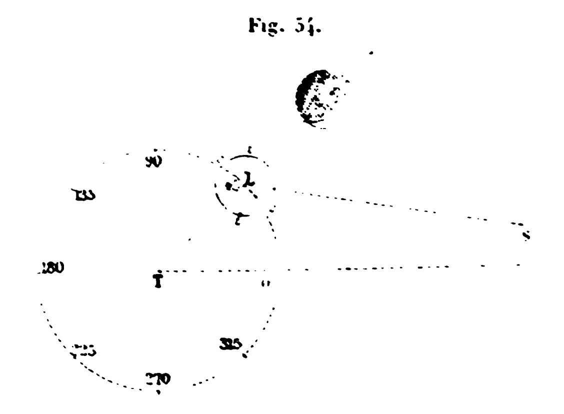
PHASES DE LA LUNE ET OBSERVATIONS MÉRIDIENNES.

Phases, Lunaison.

Néanmoins il est impossible de ne pas tenir compte du Soleil dès les premiers pas que nous faisons dans cette étude. Le Soleil, en effet, éclaire la Lune et la rend visible à nos yeux par une succession de phases semblables à celles des planètes. De plus, il agit comme masse perturbatrice, et son action, qui fait dévier la Lune de l'orbite elliptique qu'elle devrait décrire autour de la Terre, varie sans cesse comme les phases elles-mêmes auxquelles ces perturbations se rattachent intimement.

Considérons la Lune dans la position L (*fig.* 54) lorsque l'angle

Fig. 54.



en T est de 45°. L'hémisphère tourné vers la Terre a pour limite le cercle *cc'* dont le plan est perpendiculaire à TL. L'hémisphère éclairé par le Soleil a pour base le cercle *ii'* dont le plan est perpendiculaire à LS. Dès lors, la seule partie visible pour nous sera le fuseau

projeté en iLc' sur le plan de la figure. L'angle de ce fuseau est évidemment égal à l'angle LTS ou ☾ — ☉, différence des longitudes géocentriques des deux astres, du moins quand on néglige la petite inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique où l'on compte les longitudes. La figure donne le rabattement du disque lunaire; la portion visible est le mince croissant compris entre le demi-cercle du contour apparent, toujours nettement terminé, et la demi-ellipse projection du cercle d'illumination ii', toujours déchiquetée par les saillies dont le sol de la Lune est hérissé. Le reste du disque n'est pourtant pas absolument invisible; il est éclairé faiblement par la lumière que la Terre lui envoie, et nous apparaît (lorsque le croissant est très mince) d'une teinte bleuâtre, qu'on nomme la *lumière cendrée*.

Comme l'action perturbatrice du Soleil se réduit à la différence des attractions qu'il exerce sur la Terre et sur la Lune, cette action dépend évidemment de l'angle LTS qui règle les phases. Les Anciens ont donné le nom d'aspect à certaines valeurs de cet angle qui reviennent continuellement dans cette étude.

Angle T ou ☾ — ☉	Aspect.	Phase.	
0°. . . .	Conjonction	Nouvelle Lune	Éclipse possible de ☉
45. . . .	1er octant		
90. . . .	Quadrature	1er quartier	
135. . . .	2e octant		
180. . . .	Opposition	Pleine Lune	Éclipse possible de ☾
225. . . .	3e octant		
270. . . .	Quadrature	2e quartier	
315. . . .	4e octant		

On nomme aussi *syzygies* les deux aspects de la conjonction et de l'opposition pris ensemble.

La période de ces phases, c'est-à-dire la révolution synodique de la Lune, s'obtient ainsi. La révolution sidérale étant de $27^j,320166$, le moyen mouvement diurne de la Lune est donc

	$n =$	$13°.10'.34'',9$
Celui du Soleil.	$n' =$	$0.59.\ 8,2$
Vitesse relative.	$n - n' =$	$12.11.27,7$

Par suite, révolution synodique $\frac{360^\circ}{n - n'} = 29^j,5306$.

C'est la durée d'une lunaison. A chaque lunaison les phases se reproduisent dans le même ordre, et il en est de même des actions perturbatrices que le Soleil exerce sur la Lune.

Distance, Parallaxe.

Nous adopterons les symboles a, e, r, T, m, ... pour désigner le demi-grand axe, l'excentricité, le rayon vecteur, etc., de la Lune. Les éléments analogues pour la Terre porteront un accent. Nous devons prévenir de suite le lecteur qu'ici l'unité astronomique n'est plus a', mais (ρ), rayon équatorial de la Terre. Il n'y a pas moyen de mesurer la distance r de la Lune à la Terre en parties de a', comme nous l'avons fait (p. 97) pour les satellites des autres planètes. Il faut l'obtenir directement par la méthode des parallaxes: or, ce procédé donne la distance en parties de la base prise comme unité, et cette base est (ρ). Il semble d'abord, en se reportant à la figure des phases, que l'on pourrait déterminer la distance de la Lune à la Terre par le triangle TLS, au moment où la Lune est en quadrature, c'est-à-dire quand L $= 90^\circ$ ou 270°. En effet, à ce moment, la Lune est dichotome, c'est-à-dire coupée en deux par la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Si à cet instant, qu'il semble aisé de déterminer avec quelque exactitude, on mesure l'angle en T, le triangle rectangle SLT donnera le rapport de TL à ST, c'est-à-dire de r ou de a à a'. On a trouvé ainsi $\frac{1}{400}$ pour ce rapport, et nous verrons plus loin qu'effectivement la Lune est à peu près 400 fois plus près de nous que le Soleil. Mais ce procédé ne comporte aucune précision, parce que la ligne de séparation d'ombre et de lumière manque de netteté; elle est d'ailleurs trop affectée par les irrégularités du sol de la Lune.

Disons aussi que les astronomes ne se servent guère des notations r et a dans cette théorie, mais de leurs inverses $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{a}$, et comme le numérateur 1 représente le rayon équatorial de la Terre (ρ), $\frac{1}{r}$ est le sinus de la parallaxe horizontale équatoriale P

de la Lune. On remplace donc le rayon vecteur par cette parallaxe.

C'est un élément variable dont la constante $\frac{1}{a} = \sin 57'2'',66$. De là on tire $a = 60,26728$ rayons équatoriaux de la Terre. Les variations de la parallaxe P dépendent de l'excentricité $e = \frac{1}{18}$. Elles vont de $61'$ à $54'$.

Diamètre apparent, diamètre linéaire.

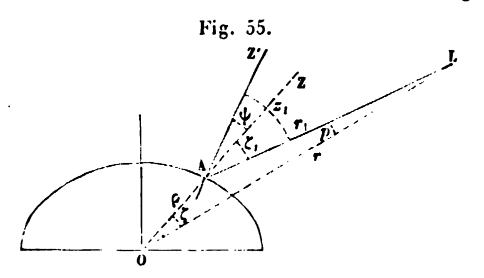
Reste un dernier élément, à savoir le diamètre angulaire Δ de la Lune vue du centre de la Terre, c'est-à-dire à la distance r. Si on représente par ι le rayon de la Lune, on a

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\iota}{r} = \iota \sin P.$$

Δ varie donc avec r, en vertu de l'excentricité de l'orbite. Sa valeur, à la distance moyenne a, est de $31'6'',24$; ses valeurs extrêmes sont $29'22''$ et $32'50''$, de sorte que la Lune, vue du centre de la Terre, paraît tantôt plus grande, tantôt plus petite que le Soleil, car le diamètre apparent de ce dernier est compris entre $31'28''$ et $32'36''$. De la valeur moyenne on déduit $\iota = 0,27264$, l'unité étant toujours (ρ). Ainsi le rayon de la Lune est à peu près le quart de celui de la Terre.

Le diamètre apparent, pour un observateur placé à la surface de la Terre, diffère sensiblement de celui-là. Sur la figure ci-jointe,

Fig. 55.



$\mathrm{LO} = r$, $\mathrm{AL} = r_1$; les distances zénithales ζ, ζ_1, rapportées, non pas à la verticale AZ', mais au rayon terrestre prolongé AZ, donnent

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta}.$$

En désignant par p la parallaxe ALC, par ψ l'angle ZAZ', par z_1 la distance zénithale ordinaire ZAL on a les relations fort simples, pour le méridien,

$$\zeta = \zeta_1 - p, \quad \zeta_1 = z_1 - \psi,$$
$$\sin p = \frac{\rho}{r} \sin \zeta_1 = \rho \sin P \sin (z_1 - \psi).$$

Si l'observation se faisait hors du méridien, ζ_1 ne serait plus égal, rigoureusement, à $z_1 - \psi$; le triangle sphérique ZZ'L donnerait

$$\cos \zeta_1 = \cos z_1 \cos \psi + \sin z_1 \sin \psi \cos A,$$

A étant l'azimut de la Lune, formule qui se réduit, à cause de la petitesse de ψ (vol. I, p. 292), à

$$\zeta_1 = z_1 - \psi \cos A.$$

Ainsi le mouvement diurne, en faisant varier r_1 de tout un rayon de la Terre, fait varier le diamètre angulaire de la Lune de $\frac{1}{60}$ environ pour l'observateur A. Elle lui paraîtra donc plus grande de $\frac{1}{60}$ au zénith qu'à l'horizon ([1]).

Les coordonnées Æ et δ varient si vite qu'on est obligé de les donner, dans les éphémérides, non pas de jour en jour, comme pour le Soleil et les planètes, mais d'heure en heure. Autrement l'interpolation serait par trop pénible. Voici un extrait de la *Connaissance des Temps* pour 1882 :

6 *juillet* 1882.

Heures.	Æ.	Variation pour 1m.	δ.	Variation pour 1m.	½ Δ.	P.
	h m s	s	° ′ ″	″	′ ″	′ ″
0...	23.56. 7,58	−2,229	87.34.27,7	−12,88	16.15,8	59.35,1
1...	38.21,32	2,229	21.35,7	12,86	15,5	34,1
2...	40.35,03	2,228	8.44,7	12,84	15,2	33,2
3...	42.48,71	2,228	86.55.55,2	12,81	14,9	32,2
4...	45. 2,36	2,227	43. 7,3	12,79	14,7	31,2
5...	47.16,00	2,227	30.21,0	12,76	74.4	30,2

([1]) La Lune, à l'horizon, nous paraît au contraire beaucoup plus grande qu'au zénith; mais ce n'est qu'un effet d'optique atmosphérique (vol. I, p. 11), qui disparaît dans les mesures.

Ces mouvements sont les plus rapides de tout le ciel, sauf ceux de certaines comètes. Lorsqu'on dirige la lunette d'un équatorial bien réglé sur une étoile, la lunette suit l'astre dans son mouvement diurne et reste exactement pointée sur lui. Il en est à peu près de même pour le Soleil et les planètes; mais, quand il s'agit de la Lune, quelques secondes manifestent déjà le mouvement propre de notre satellite. Pour le suivre, malgré la variation d'Æ opposée au mouvement diurne, il faut agir sur le moteur et lui imprimer un retard d'environ 2^s par minute de temps sidéral. Il faudrait aussi tenir compte du mouvement de l'astre en distance polaire; on vient de voir que, le 6 juillet, il était de $13''$ par minute. Ce qui achève de compliquer ces effets, c'est la variation incessante de la parallaxe et de la réfraction en Æ et en δ.

Observations méridiennes.

Lorsqu'on observe la Lune à son passage par le méridien, comme ce plan contient à la fois la station M et le centre O de la Terre, l'instant de ce passage est le même en O et en M, autrement dit l'Æ observée n'est point affectée par la parallaxe. Seule la distance zénithale exige, de ce chef, une correction qui doit lui être appliquée si l'on veut obtenir la distance polaire géocentrique δ. Supposons que la lunette méridienne décrive exactement le méridien, que l'observation ait été faite régulièrement à tous les fils du réticule, enfin que H et H′ soient les moyennes des observations faites aux deux bords du disque lunaire; on aura, comme pour le Soleil (p. 29), ∂Æ étant la variation de Æ en 1^s,

$$\frac{H+H'}{2} = \text{Æ}, \quad \frac{H'-H}{2} = \frac{\frac{1}{2}\Delta}{(15''-\partial\text{Æ})\sin\delta},$$

relations dont la première donne, pour le centre de la Terre, l'ascension droite du centre de la Lune, et la seconde, le demi-diamètre angulaire de cet astre.

Si, au même instant, on a mesuré au cercle mural les distances zénithales z_1 et z'_1 des deux bords supérieur et inférieur (corrigés de la réfraction), on aura

$$\delta = \frac{z_1+z'_1}{2} - p + \lambda, \quad \frac{z'_1-z_1}{2} = \frac{1}{2}\Delta_1,$$

p étant calculé (p. 210) par

$$\sin p = \rho \sin P \sin\left(\frac{z_1 + z'_1}{2} - \psi\right),$$

formule dans laquelle P est donné pour l'heure de l'observation par la *Connaissance des Temps*. Enfin on obtient $\frac{1}{2}\Delta$ par

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta}{\sin\frac{1}{2}\Delta_1} = \frac{\sin\left(\frac{z_1 + z'_1}{2} - \psi - p\right)}{\sin\left(\frac{z_1 + z'_1}{2} - \psi\right)}.$$

Ces deux manières de déterminer le diamètre apparent de la Lune, en deux sens rectangulaires, donnent constamment le même résultat ; par conséquent, le disque de cet astre est circulaire. Comme la Lune tourne toujours vers nous la même face, cela ne prouve pas qu'elle soit sphérique ; elle pourrait avoir la figure d'un ellipsoïde de révolution, à peu près, autour du diamètre qu'elle dirige vers nous. La théorie montre qu'il doit en être ainsi, mais l'allongement de cet ellipsoïde à trois axes inégaux est très faible ; la Lune peut être considérée ici comme sphérique sans erreur appréciable.

Nous avons supposé que les deux bords étaient observés au passage de la Lune au méridien. Cela n'arrive que rarement. à l'époque de la pleine Lune. D'ordinaire on n'observe que le premier bord, lorsque la Lune passe au méridien avant minuit, ou le second, lorsque l'observation a lieu après minuit. Supposons-nous dans le premier cas : à l'heure H, moyenne des observations faites aux cinq fils de la lunette, c'est-à-dire à l'heure du passage du premier bord, il faudra ajouter le temps employé par le demi-diamètre horizontal à passer au méridien. Ce temps, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta}{(15'' - d\text{Æ})\sin\delta},$$

se trouve tout calculé dans la *Connaissance des Temps*, heure par heure.

De même, au cercle mural ou au cercle méridien, il est bien rare qu'on observe à la fois les deux bords ; il n'y en a presque jamais qu'un qui soit bien terminé. Supposons qu'on ait observé le bord inférieur : pour avoir la distance zénithale du centre, il

faudra retrancher, de celle du bord, le demi-diamètre apparent $\frac{1}{2}\Delta_1$, et c'est pour la distance zénithale apparente $z'_1 - \frac{1}{2}\Delta_1$ qu'on calculera la parallaxe p. Mais ici se présente une petite difficulté : les éphémérides donnent $\frac{1}{2}\Delta$ et non $\frac{1}{2}\Delta_1$. Or, pour calculer $\frac{1}{2}\Delta_1$, il faut recourir, dans ce cas, à la formule ($\zeta'_1 = z'_1 - \psi$)

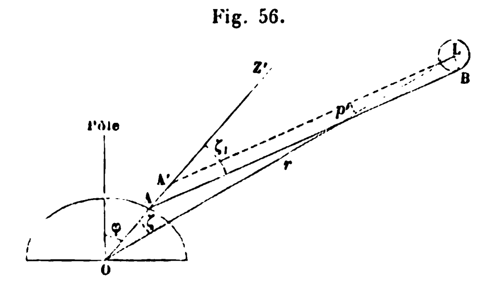
$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta_1}{\sin\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\sin(\zeta'_1 - \frac{1}{2}\Delta_1)}{\sin(\zeta'_1 - \frac{1}{2}\Delta_1 - p)}.$$

On lèverait cette difficulté en calculant p à l'aide de la distance zénithale approchée du centre $\zeta' - \frac{1}{2}\Delta$; on en conclurait $\frac{1}{2}\Delta_1$ et on reprendrait le calcul de p avec cette nouvelle approximation.

Il vaut mieux éviter le calcul de $\frac{1}{2}\Delta_1$ et employer des formules exactes.

Soient ζ'_1 la distance zénithale Z'AB du bord inférieur (*fig.* 56),

Fig. 56.



ζ celle du centre L vu du centre O de la Terre, et p' la différence de ces deux angles. Menons par L la droite LA' parallèle à BA. Le triangle LOA' donnera

$$\frac{\sin p'}{OA + AA'} = \frac{\sin \zeta'_1}{r}.$$

Et comme

$$OA = \rho, \quad AA' = \frac{v}{\sin\zeta'_1}, \quad \frac{v}{\rho} = \sin\chi, \quad \frac{1}{r} = \sin P,$$

on aura

$$\sin p' = 2\rho \sin P \sin\tfrac{1}{2}(\zeta'_1 + \chi) \operatorname{co}\tfrac{1}{2}(\zeta'_1 - \chi).$$

Par suite,

$$\zeta = \zeta'_1 - p' \quad \text{et} \quad \delta = \zeta + \varphi = z'_1 - p' + \lambda,$$

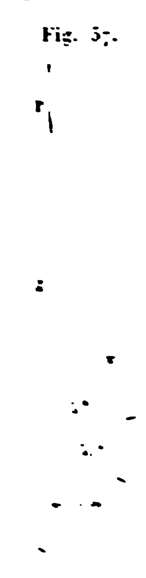
en désignant par z'_1 la distance zénithale ordinaire du bord inférieur. A Paris $\chi = 15°51'$, $\log\rho = 9,99916$, $\psi = 11'41'',74$.

Corrections instrumentales.

Quand on observe le passage du bord de la Lune à un fil autre que celui du milieu du réticule, l'instant de ce passage est légèrement affecté de la parallaxe, parce que l'observation est faite hors du méridien. Mais les fils latéraux étant répartis symétriquement par rapport au fil du milieu, ces petits effets disparaissent de la moyenne. Si l'observation n'a pu être faite à tous les fils, par suite des ondulations atmosphériques ou du passage d'un petit nuage sur le disque de la Lune, il faut réduire au fil du milieu les observations faites à chacun des fils latéraux, et tenir compte alors de la parallaxe.

Soit, en projection sur le plan de l'horizon (*fig.* 57), le méridien

Fig. 57.



[illegible] angulaire *f* du fil du [illegible] la Lune touche [illegible] représenté par L, L le [illegible] point correspondant [illegible] l'angle horaire [illegible] de la Terre, il est au [illegible] que le bord de la Lune

a réellement à franchir pour atteindre le fil du milieu ou le méridien. Les triangles ZPL, ZPL_1 donnent

$$\frac{\sin \text{Æ}}{\sin z} = \frac{\sin \text{PZL}}{\sin \delta}, \quad \frac{\sin \text{Æ}_1}{\sin z_1} = \frac{\sin \text{PZL}_1}{\sin \delta_1}.$$

Par conséquent,

$$\text{Æ} = \text{Æ}_1 \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta} \frac{\sin z}{\sin z_1};$$

d'autre part,

$$\text{Æ}_1 = \frac{f}{(15'' - \partial \text{Æ}) \sin \delta_1};$$

donc

$$\text{Æ} = \frac{f}{(15 - \partial \text{Æ}) \sin \delta} \frac{\sin z}{\sin z_1}.$$

Voici un exemple de ce genre de calculs, que je prends dans un Mémoire d'un lieutenant de vaisseau, M. de Bernardières, observant aux îles d'Hyères, par $0^h 15^m$ de longitude et $46^\circ 53'$ de colatitude. L'observation de la Lune, 1[er] bord, du 17 mars 1878 a donné :

	h m s
1[er] fil	10.56.28,0
2[e] fil	56.42,0
3[e] fil	56.56,4
4[e] fil	57.10,6
5[e] fil	»

La distance de ces fils, non pas au fil du milieu, mais à un fil idéal correspondant à la moyenne était, en temps :

	s
1[er] fil	+ 27,412
2[e] fil	+ 13,781
3[e] fil	+ 0,038
4[e] fil	— 13,744
5[e] fil	— 27,506

La *Connaissance des Temps* donne

$$\partial \text{Æ} = \frac{2.2651 \times 15''}{60,164} = 0'',5647\ (^1), \quad \delta = 85^\circ 30', \quad P = 61',4.$$

---

(1) La *Connaissance des Temps* donne $\partial \text{Æ} = 2^s,2651$ pour 1^m de temps moyen, c'est-à-dire pour $60^s,164$ de temps sidéral.

Le cercle de la lunette méridienne donnait $z_1 = 39°16'$. On en déduit $p = 39'$, $z = 38°37'$.

Pour avoir en temps les angles horaires de Lune répondant aux fils, il faut multiplier les nombres ci-dessus par le facteur

$$\frac{15}{14,4353 \sin\delta}\,\frac{\sin z}{\sin z_1}.$$

log 15..................	1,17609			
C' log 14,4353	8,84058			
C' log sin δ..............	0,00134			
log sin z................	9,79536			
C' log sin z_1.............	0,19864			
	0,01201	0,01201	0,01201	0.01201
log distance des fils.....	1,43794	1,13928	8.57978	1,13811
	1,44995	1,15129	8,592	1,15012
	28s,18	14s,17	+0s,04	−14s,13
Passages observés.......	10h.56m.28s,00	42s,0	56s,4	57m.10s.6
	10 .56 .56 ,18	56 ,17	56,44	56.56 .47

La moyenne de ces quatre observations ramenées au fil idéal moyen est $10^h 56^m 56^s,32$.

Il resterait à multiplier, par le même facteur

$$\frac{1}{15 - \partial Æ}\,\frac{\sin\delta_1}{\sin\delta}\,\frac{\sin z}{\sin z_1},$$

la somme des corrections instrumentales qu'il faudrait appliquer à cette moyenne, c'est-à-dire

$$\frac{a \sin z_1 + i \cos z_1 + c}{\sin\delta}.$$

Quant au cercle mural, aucune correction n'est nécessaire si l'observation a été faite au méridien. Mais si l'on a pointé sur le bord de la Lune t secondes après le passage du centre au méridien, il faudra appliquer ici deux corrections :

1° La réduction au méridien, d'après la formule de la page 173 du Volume :

$$206265'' \tang^2 \tfrac{1}{2} Æ \sin 2\delta - \ldots,$$

en ayant soin de calculer Æ par la formule

$$t(15'' - \partial Æ);$$

2° La variation que δ a subie dans l'intervalle t, par suite du mouvement de la Lune en distance polaire. Elle a pour expression $t\partial\delta$, $\partial\delta$ étant la variation pour 1ˢ prise dans la *Connaissance des Temps* pour la date de l'observation.

Nous avons cru devoir insister sur ces corrections minutieuses, parce que les observations de ce genre servent souvent à la détermination des longitudes géographiques. Ce sont, en réalité, les observations les plus délicates et les plus difficiles de toute l'Astronomie pratique.

CHAPITRE XXXI.

ÉLÉMENTS DE L'ORBITE LUNAIRE. LEURS VARIATIONS.

Nous avons vu que les éléments des orbites planétaires, sauf les grands axes, sont soumis à des variations séculaires extrêmement petites, en sorte que les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses lentement variables de forme et de position. Après avoir calculé la position d'une planète, suivant les lois de Kepler, en employant les éléments actuels de son orbite, on ajoute à ses coordonnées les perturbations représentées par de petits termes périodiques. Ces petites variations séculaires et ces petites inégalités périodiques proviennent des attractions planétaires. Il en est de même pour la Lune. Son grand axe et la durée de sa révolution sont invariables (¹); tous les autres éléments varient, mais avec une rapidité étonnante. Les inégalités périodiques elles-mêmes sont démesurées en comparaison de celles des planètes. Enfin il n'y a ici qu'un seul astre perturbateur, mais c'est le Soleil, dont la puissante attraction explique, à elle seule, ces grandes déviations de la marche purement elliptique.

Commençons par les deux éléments invariables, le demi-grand axe ou la distance moyenne de la Lune à la Terre, et la durée de la révolution sidérale.

Durée de la révolution.

Les coordonnées équatoriales ayant été transformées en coordonnées écliptiques, on compare des longitudes séparées par le plus grand intervalle possible, après les avoir corrigées des inégalités périodiques, ou bien en ayant soin de choisir des observa-

(¹) Sauf une minime variation séculaire dont nous nous occuperons plus loin.

tions faites à deux époques où le Soleil avait la même position relativement à la Terre, à la Lune et au périgée de l'orbite lunaire, en sorte que les inégalités dues à l'action de cet astre affectent les deux longitudes de la même manière. On en déduit la durée de la révolution tropique (par rapport au point γ)

$$27^j,3215822,$$

puis la révolution sidérale

$$27^j,3216608.$$

Mesure directe de la parallaxe.

La détermination du demi-grand axe a se confond avec celle de la parallaxe horizontale équatoriale dont le sinus est $\frac{(\rho)}{a}$ ou simplement $\frac{1}{a}$, en prenant ici pour unité le rayon (ρ) de l'équateur terrestre.

On y applique le procédé que nous avons décrit pour Mars. Ici le triangle AMB de la page 209 n'est plus désavantageux, car, en choisissant convenablement les stations, on peut porter à près de 90′ l'angle au sommet. L'Académie chargea, au dernier siècle, Lalande et Lacaille de cette mesure. Le premier alla se poster à Berlin; le second, au Cap de Bonne-Espérance. Leurs observations ont donné pour la parallaxe de la Lune, dans sa distance moyenne à la Terre,

$$57'3'',20.$$

En combinant des observations beaucoup plus récentes, faites en Angleterre et à l'Observatoire que les Anglais ont établi au Cap, non loin de la station choisie par Lacaille, M. Henderson a trouvé

$$57'2'',20.$$

Enfin, par des observations encore plus récentes aux deux mêmes stations, M. Breen a obtenu

$$57'3'',16.$$

J'ai réduit ces trois déterminations à la valeur actuelle de l'aplatissement $\frac{1}{292}$; la moyenne est

$$57' 2'',85.$$

Détermination théorique de cette constante.

Si la Terre avait un autre satellite dont les éléments fussent parfaitement connus, on en déduirait le demi-grand axe a de l'orbite lunaire par la troisième loi de Kepler. Or tout corps qui tombe sur notre globe, tout pendule qui oscille à sa surface peut être considéré comme un satellite de la Terre et conduire au résultat cherché.

Imaginons un satellite circulant autour de la Terre dans un cercle de rayon (ρ); soit T' la durée de sa révolution en secondes de temps moyen; nous aurons, en désignant par m' la masse de la Terre et en prenant (ρ) pour unité,

$$fm' = \frac{4\pi^2}{T'^2}.$$

De même pour la Lune, en désignant par m sa masse, par a et T son demi-grand axe et la durée de sa révolution,

$$f(m' + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\left(1 + \frac{1}{357}\right) \quad (^1).$$

Mais nous avons vu (p. 148) que la durée de la révolution du 1er satellite a pour expression

$$2\pi\sqrt{\frac{(\rho)}{G}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{(G)}},$$

(G) étant l'attraction terrestre sur un point extérieur, à la distance (ρ) prise pour unité, et exprimée en parties de cette même unité.

(¹) Ce facteur numérique a pour but de tenir compte de la partie non périodique de l'action perturbatrice du Soleil. Celle-ci a pour effet d'affaiblir de $\frac{1}{357}$ l'attraction de la Terre sur la Lune. *Voir* le Tome III de la *Mécanique céleste*, p. 2[illegible]6. Le facteur employé dans cette page est un peu différent; en l'adoptant, on trouverait $57' 2'',4$, au lieu de $57' 2'',66$.

La première relation se réduit donc à

$$f(m') = (G).$$

En la combinant avec la seconde, on trouve

$$a = \sqrt[3]{\frac{(G)T^2}{4\pi^2}\,\frac{357}{358}\left(1 + \frac{m}{m'}\right)}.$$

Nous verrons plus loin que la masse de la Lune est $\frac{1}{80,72}$ de celle de la Terre. Voici le calcul de a ou de $P = \text{arc sin}\,\frac{1}{a}$.

T.........	$27^j,321661$	log G....	0,9911419		
log T......	1,4365071	log(ρ)..	6,8047113		
log 86400..	4,9365137	log(G)..	4,1864306—10		
C' log 2π..	9,2018201	$2\log\frac{T}{2\pi}$..	11,1496818		
$\log\frac{T}{2\pi}$.....	5,5748409	$\log\frac{357}{358}$..	9,9987852—10		
		$\log\frac{81,72}{80,72}$	0,0053472		
		$\log a^3$...	5,3402448		
		$\log a$....	1,7800816	$\log\frac{1}{a}$...	8,2199184
		a.......	60,26728	P.......	57′2″,66

C'est là la constante de la parallaxe que nous adopterons ; elle ne diffère que de 0″,19 de la parallaxe directement mesurée. Elle est certainement connue à moins d'une demi-seconde près, ce qui porte son erreur relative à moins de $\frac{0,5}{3522}$ ou $\frac{1}{7000}$. Pour exprimer la distance moyenne de la Lune à la Terre en mètres ou en lieues de 4000^m, il suffit de multiplier 60, 26728 par la valeur du rayon équatorial de la Terre en mètres ou en lieues. On trouve ainsi 96102 lieues avec une incertitude de ± 14 lieues.

Position du plan de l'orbite.

Deux observations convenablement choisies, dans le cours d'une révolution, donneraient i et N par la formule

$$\sin(L - N) = \cot i \cot \beta;$$

mais, dès les premiers pas, on est arrêté par un phénomène bien remarquable. L'inclinaison i varie fort peu, tandis que la longitude N du nœud change rapidement, même d'un jour à l'autre. Voici, pour fixer les idées, une série de positions de la Lune, non pas observées, mais calculées d'après les Tables de Hansen, et tirées de la *Connaissance des Temps* pour 1882. Elles nous permettront de suivre ces phénomènes avec tout autant de sûreté que si nous opérions sur les observations elles-mêmes.

Coordonnées de la Lune au commencement de 1882.

Dates.		Longitude L.	Latitude $90° - \beta$.	Parallaxe $\arcsin \frac{1}{r}$.
		° ′	° ′	′ ″
Janvier	1...........	67.22	+ 0. 8	55.58
	2...........	79.54	— 1. 0	55.28
	3...........	92.16	— 2. 4	55. 3
	4...........	104.30	— 3. 2	54.42
	5...........	116.35	— 3.51	54.24
	6...........	128.35	— 4.29	54.10
	7...........	140.29	— 4.55	54. 2
	8...........	152.21	— 5. 8	54. 2
	9...........	164.12	— 5. 8	54. 8
	10...........	176. 7	— 4.54	54.24
	11...........	188. 9	— 4.28	54.49
	12...........	200.23	— 3.49	55.24
	13...........	212.52	— 2.58	56. 9
	14...........	225.43	— 1.58	57. 1
	15...........	238.59	— 0.49	57.58
	16...........	252.43	— 0.25	58.56
	17...........	266.56	— 1.40	59.50
	18...........	281.35	— 2.50	60.34
	19...........	296.35	— 3.51	61. 3

Coordonnées de la Lune au commencement de 1882.
(Suite.)

Dates.	Longitude L.	Latitude 90° — β.	Parallaxe arc sin $\frac{1}{r}$.
	° ′	° ′	′ ″
Janvier 20	311.47	+ 4.35	61.14
21	327. 0	+ 5. 0	61. 5
22	342. 4	+ 5. 5	60.39
23	356.49	+ 4.48	60. 0
24	11.11	+ 4.14	59.12
25	25. 6	+ 3.26	58.21
26	38.36	+ 2.27	57.31
27	51.41	+ 1.22	56.44
28	64.27	+ 0.15	56. 3
29	76.57	— 0.52	55.28
30	89.14	— 1.55	54.59
31	101.22	— 2.51	54.36
Février 1	113.24	— 3.40	54.19
2	125.22	— 4.18	54. 6
3	137.16	— 4.45	53.59
4	149. 9	— 4.59	53.56
5	161. 2	— 5. 0	53.59

Jn coup d'œil suffit pour voir que l'inclinaison est voisine de Elle ne varie, dans le courant de l'année, que de 4°59′ à 5°18′; valeur moyenne est de 5°8′47″. Quant au nœud ascendant, on trouvera la longitude par une simple interpolation entre le et le 16 janvier. On aura celle du nœud descendant en opérant même entre le 1er et le 2, ou entre le 28 et le 29. Si l'on ajoute à dernières 180°, on obtiendra deux nouvelles déterminations N :

N = 248°50′	1er janvier
248. 0	15-16,
247.15	28-29.

En calculant N à diverses époques par la formule précédente, on ra que le nœud est tantôt direct, tantôt rétrograde, mais qu'en

somme, au bout de chaque mois, le mouvement rétrograde l'emporte toujours. Il est facile d'en déterminer la vitesse moyenne en comparant des valeurs de N à des dates très éloignées. On trouve ainsi

$$\text{Moyen mouvement diurne du } \Omega = -3'10'',63.$$

Longitude moyenne du nœud à la date t,

$$N_0 - 190'',63\,t,$$

N_0 étant la longitude moyenne à l'époque $t = 0$. La durée de la révolution rétrograde du nœud est de $18^{\text{ans}},6$.

Il est utile d'évaluer par rapport à ce point la révolution de la Lune. Son moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}$ est égal à

$$13^\circ 10' 34'',9,$$

d'où la vitesse relative au nœud

$$13^\circ 13' 45'',53.$$

La révolution synodique cherchée ou révolution draconitique est donc de $27^{\text{j}},21229$. Ce nom singulier vient de ce que le signe du nœud ascendant, que nous avons remplacé sur nos figures par un Ω, était et est encore pour les astronomes le symbole d'un dragon tortueux ☊. C'est le dragon céleste qui, d'après de bien vieilles traditions, guette la Lune à son passage dans l'écliptique et produit les éclipses.

L'orbite de la Lune, ou du moins sa perspective sur la voûte céleste, forme une suite de spires enchevêtrées qui occupent un espace de 5° au nord et de 5° au sud de l'écliptique, ce qui donne au zodiaque (zone parcourue par les planètes, suivant les anciens) une largeur de 10° (1). Les conséquences de ce mouvement du plan de l'orbite lunaire, dont l'inclinaison reste à peu près constante pendant que sa trace fait le tour du ciel en 18 ans, sont des plus remarquables.

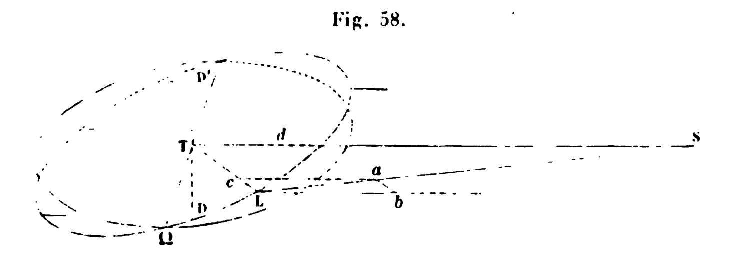
---

(1) Les fortes latitudes géocentriques de Vénus ont même obligé les anciens à donner au zodiaque une largeur de 17 à 18°.

Action perturbatrice du Soleil.

La figure L représente l'orbite lunaire ☊DLD'... et sa projection sur le plan de l'écliptique. L*a* et T*d* sont, en grandeur et en direction, les attractions du Soleil S sur la Lune et la Terre. Décomposons la force L*a* suivant la droite LT, et suivant L*b* parallèle à TS. La composante L*c* s'ajoute à la force centrale qui sollicite la Lune

Fig. 58.



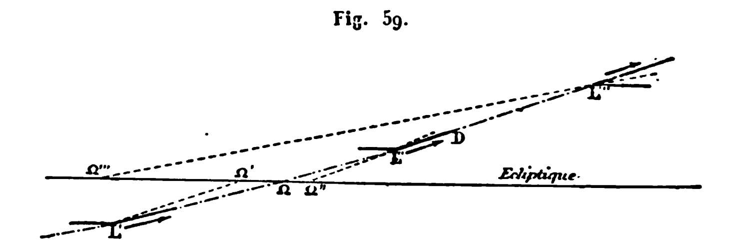
dans son orbite; elle n'a aucune action sur la position de ce plan. L'autre composante L*a* ne troublerait pas les mouvements de L par rapport à T, si L*b* et T*d* étaient égales. La force perturbatrice qui tend à faire sortir la Lune du plan de son orbite actuelle et, par suite, à déplacer ce plan est donc L*b* — T*d*. Dans une partie de l'orbite la force perturbatrice est dirigée dans le sens TS; dans l'autre, elle est de sens opposé, parce que la différence L*b* — T*d* devient négative. Il y a deux points morts D et D', points où la Lune, en quadrature, est aussi éloignée du Soleil que la Terre. Cette force varie évidemment comme le sinus de l'angle LTD.

Déplacement imprimé à la ligne des nœuds.

Considérons une région voisine du nœud et projetons l'orbite lunaire et l'écliptique sur un plan perpendiculaire à leur intersection (*fig.* 59). La Lune y est figurée à trois instants différents en L, L', L''. Soit D l'un des points morts, et admettons que le Soleil se trouve à droite. Au-dessus de D, la force perturbatrice sera dirigée vers la droite; au-dessous de D, elle sera dirigée vers la gauche. En L', la résultante de la vitesse propre de la Lune et de celle qui lui est imprimée par cette force sera dirigée suivant L'☊'. L'☊' sera donc tan-

gente à l'orbite instantanée décrite alors par la Lune, et TΩ' sera la trace de ce plan sur l'écliptique, c'est-à-dire la nouvelle ligne des nœuds. On voit que celle-ci aura rétrogradé de TΩ en TΩ'. Il

Fig. 59.



en sera de même en L''', lorsque la Lune aura franchi l'arc ΩD. Mais entre Ω et D en L'', ou bien, dans la région opposée, entre Ω et D', la même construction donne un mouvement direct pour la ligne des nœuds. Il est facile de voir que la vitesse du nœud, alternativement direct et rétrograde, produira, au bout d'une révolution, un déplacement rétrograde dont nous avons évalué plus haut la vitesse moyenne, c'est-à-dire la partie constante. Newton a fait voir que la partie périodique était proportionnelle au produit des sinus des trois distances angulaires de la Lune au point D, de la Lune au nœud, et du point D au Soleil. En intégrant à sa manière l'expression algébrique de la vitesse, il a trouvé, pour la longitude du nœud,

$$N = N_0 + \nu t + K \sin 2[(N) - ⊙],$$

N_0 étant la longitude moyenne du nœud à l'époque $t = 0$, ν son moyen mouvement diurne, (N) sa longitude moyenne à l'époque t, c'est-à-dire $N_0 + \nu t$. Ces coefficients ν et K ont pour valeurs, en fonction du rapport $\frac{T}{T'} = x$ (¹),

$$\nu = -\tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{9}{32}x^3 - \ldots, \quad K = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{6}{16}x^2 + \ldots.$$

Ce sont les premiers termes de séries rapidement convergentes. Il est facile de calculer ces coefficients en faisant $x = \frac{27,321}{365,256}$

(¹) T et T', révolutions sidérales de la Lune et de la Terre.

(environ $\frac{1}{13}$). On les réduira en secondes en les multipliant par 206265″, et on aura

$$N = N_0 - (3'12'')t + (1^\circ 25' 35'')\sin 2[(N) - \odot],$$

formule qui représente parfaitement les observations, bien qu'elle ne leur emprunte rien que la valeur de la constante N_0 introduite par l'intégration.

Inclinaison de l'orbite lunaire.

L'inclinaison de l'orbite varie également, mais non d'une manière progressive. Il y a ici une compensation qui revient à chaque révolution. La figure précédente fait voir, en effet, que si l'inclinaison en L′ tend à augmenter d'un petit angle correspondant à ☊L′☊′, l'effet contraire se produit dès que la Lune a franchi le point D, car en L‴ l'inclinaison diminue d'un petit angle correspondant à ☊L‴☊‴. Ces deux effets contraires se produisent et se compensent à chaque révolution. Ainsi l'inclinaison i oscille simplement et fort peu autour d'une valeur constante (i).

Newton a trouvé

$$\operatorname{tang} i = \operatorname{tang}(i) + \tfrac{3}{8}\varkappa \operatorname{tang}(i) \cos 2[(N) - \odot],$$

ce qui s'accordait bien avec les observations de Tycho-Brahé. Ce célèbre astronome, à qui l'on doit la découverte de ces inégalités périodiques du nœud et de l'inclinaison, en donnait même une figuration géométrique saisissante. L'argument $2[(N) - \odot]$ a pour période la moitié de la révolution synodique du nœud dont voici le calcul :

Vitesse moyenne du ☉...........	+ 59′.8″,19
Vitesse moyenne du nœud........	— 3.10,63
Vitesse relative..................	1° 2.18,82

d'où révolution synodique du nœud $= 346^j,6195$, dont la moitié est de 173 jours. La rétrogradation moyenne du nœud étant représentée par un mouvement conique uniforme de l'axe du plan de

l'orbite lunaire autour de l'axe de l'écliptique, sous un angle constant (i), imaginez que le premier axe soit une ligne fictive autour de laquelle l'axe du plan actuel tourne coniquement en 173 jours, sous un angle de $\frac{3}{8} \times \tang(i)$ ou de $9'$: la combinaison de ces deux rotations coniques représentera, à tout instant, la direction réelle de l'axe du plan de l'orbite lunaire, et par suite les variations du nœud et de l'inclinaison.

La théorie mécanique de ces mouvements et celle d'une inégalité lunaire dont on parlera plus loin ont été données par Newton, et l'on a vu qu'il a déduit de la première, par une analogie plausible, la théorie de la précession et des termes à courte période de la nutation. Cet ensemble de recherches, d'un genre aussi profond que nouveau, a jeté une vive lumière sur de grands problèmes dont on n'avait même pas entrevu la connexité depuis 2000 ans. Si ces résultats frappants de la doctrine de l'attraction n'ont pas été appréciés par les contemporains de Newton, c'est que l'analyse entièrement nouvelle qu'il y a appliquée était masquée par les procédés d'exposition synthétique auxquels il se croyait tenu de s'astreindre, par respect pour les grands géomètres de l'antiquité.

Hypothèse géologique de la chaleur centrale.

Cependant son explication de la précession n'est pas de nature à donner une idée complètement juste du phénomène. Après avoir isolé par la pensée la protubérance équatoriale, Newton montre que la rétrogradation de ses nœuds s'opérerait de la même manière, que les matériaux fussent discontinus, comme une série de satellites, ou à l'état fluide, ou même formant un tout solidifié et résistant. Dès lors cet anneau, relié à la sphère interne, doit agir sur elle tangentiellement et communiquer à sa masse énorme la quantité de mouvement dont l'animent les faibles actions perturbatrices de la Lune et du Soleil. En suivant cet ordre d'idées, quelques géomètres se sont dit que cette communication de mouvements, de la masse rigide de l'anneau à celle de la sphère intérieure, ne se ferait pas sans frottements ou déformations, si celle-ci était à l'état de fluidité incandescente; que, dans cette hypothèse, la précession observée devrait différer de la précession calculée. Or,

ɔmme il y a accord entre la théorie et l'observation, il faut en ɔnclure, suivant eux, que la masse intérieure possède une rigidité ɔmplète, que le refroidissement s'y est opéré depuis longtemps et, nalement, que l'hypothèse des géologues sur la chaleur centrale st fausse.

Mais il y a là une erreur de fait. La Terre n'est pas homogène, omme le supposait Newton. Elle se compose de couches de ensités croissant vers l'intérieur, et ces couches ont chacune leur platissement particulier. L'action du Soleil et de la Lune ne 'exerce donc pas sur une masse rigide extérieure au noyau sphéique, mais sur chacune des couches dont la Terre se compose. es matériaux à entraîner ne se distinguent pas de ceux qui sont ıus ; ils n'en sont pas séparés par un bras de levier considérable ; ıais, à cause de leur mélange et de l'énorme compression qu'ils ubissent, les choses se passent comme si l'action perturbatrice 'exerçait sur la masse entière, affaiblie seulement dans un cerin rapport.

Variation du périgée et de l'excentricité.

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour passer, des cooronnées écliptiques, aux coordonnées dans l'orbite par la formule

$$\tan(L - N) = \cos i \tan(\mathcal{L} - N),$$

u au moyen de la série connue qui la remplace. En comparant es longitudes à leur expression théorique (pour le mouvement lliptique)

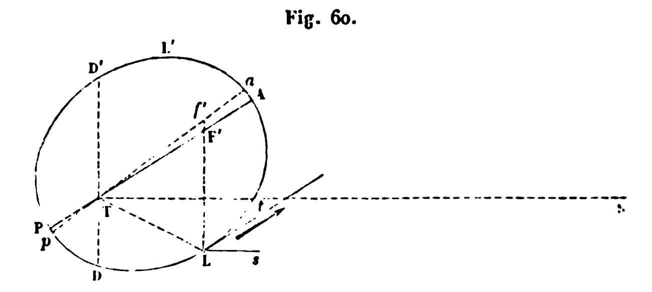
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + nt + A_1 \sin(\mathcal{L}_0 + nt - \varpi) + \ldots,$$

n déterminerait les trois éléments $\mathcal{L}_0$, e, ϖ. Mais, dès les premiers as, on rencontre un phénomène bien remarquable. La direction u grand axe, donnée par la longitude ϖ du périgée, change connuellement d'un jour à l'autre, comme le nœud, mais plus vite ncore que le nœud. Le tableau de la page 300 montre, sans calcul, ue l'apogée, correspondant au minimum de $\frac{1}{a}$, tombe le 7 janvier ar 146° de longitude. On le retrouve le 4 février par 149°, tandis ue le périgée, qui devrait être à 180° de là, tombe le 20 janvier

par 322°. Pour atténuer l'effet de ces inégalités considérables, on comparera des observations très distantes et on constatera que le périgée fait le tour du ciel, en sens direct, dans une période de neuf ans, et que son moyen mouvement diurne est de $+6'40'',92$. C'est un effet de la force perturbatrice du Soleil estimée, dans le plan même de l'orbite, suivant la tangente à l'orbite et le rayon vecteur.

On se rend compte facilement de l'effet de la composante tangentielle (*fig.* 60). Soient T la Terre à l'un des foyers de l'ellipse

Fig. 60.



lunaire, F' le second foyer, PTA la direction du grand axe, L la Lune, Ls la force perturbatrice appliquée en L parallèlement à TS, r et r' les rayons vecteurs. Si l'on désigne par $2a$ le grand axe, on aura $r+r'=2a$. La composante tangentielle Lt augmente ici la vitesse V de l'astre; elle ne modifie ni r, ni la force centrale μ, et, comme on a toujours

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

en différentiant, on aura $2V\,dV = \frac{\mu}{a^2}\,da$; ainsi a et, par suite, r' augmentent en même temps que V. Si $r' = \mathrm{LF'}$ augmente, le second foyer F' ira se placer en f'; par conséquent, le grand axe se déplacera, dans le sens direct, de l'angle ATa, et l'excentricité augmentera. Des effets analogues se produiront sur la partie DAD' de l'orbite; ils seront inverses sur l'autre partie.

La composante radiale a un rôle non moins efficace, mais plus compliqué. La question ne saurait être traitée complètement que par l'analyse. On trouve alors que le mouvement du périgée présente une inégalité de la forme $\alpha \sin 2[(\varpi) - \odot]$ et qu'à ces fluctua-

tions répond une variation dans l'excentricité qui s'exprime par $\alpha e \cos 2[(\varpi) - \odot]$.

Ainsi on peut appliquer à l'étude des mouvements de la Lune les formules du mouvement elliptique, à la condition de prendre pour ϖ, à la date t,

$$\varpi_0 + 6'40'',92\,t - \alpha \sin 2[(\varpi) - \odot],$$

et pour excentricité

$$e + \alpha e \cos 2[(\varpi) - \odot].$$

C'est ainsi que Newton a présenté les choses, mais, lorsqu'il a voulu calculer théoriquement la principale constante de la première inégalité, ou, ce qui revient au même, le mouvement du périgée pendant une révolution de la Lune, il a trouvé 1°30′ au lieu de 3°3′ (6′ par jour) que donnent les observations. Longtemps après lui les géomètres les plus éminents, Euler, Clairaut et d'Alembert, essayèrent en vain de résoudre ce point faible de la théorie de l'attraction. Clairaut en vint même, en désespoir de cause, à proposer à l'Académie de modifier la loi de l'attraction et d'y ajouter un petit terme proportionnel à l'inverse de la quatrième puissance de la distance. Buffon protesta hautement contre cette complication, qu'il jugeait incompatible avec la simplicité des lois primordiales de la nature. Clairaut vit enfin que l'erreur de Newton provenait de ce que le coefficient α se compose d'une série peu convergente de termes qui ne peuvent être obtenus que par des intégrations successives. Newton s'était arrêté au premier, qui ne représente guère que la moitié de la valeur définitive. Clairaut rétablit l'accord entre la théorie et l'observation, et fit ainsi disparaître l'objection la plus grave qu'on pût faire à la nouvelle théorie.

Le mouvement moyen diurne du périgée étant de $+ 6'40'',92$ par jour, on en conclut la révolution de la Lune par rapport à ce point mobile :

Révolution anomalistique $= 27^j,554600$.

CHAPITRE XXXII.

PRINCIPALES INÉGALITÉS. TABLES DE LA LUNE.

Évection.

Les anciens ont connu les singulières variations que nous venons d'indiquer. Bouillaud leur a donné le nom d'*évection*, pour exprimer qu'elles faisaient sortir la Lune de la position que lui assignaient les lois du mouvement excentrique. Pour Ptolémée, la longitude avait pour expression

$$\text{long. moy.} + \text{équation du centre} + \text{évection},$$

ou bien, avec nos notations,

$$\text{long. moy.} + 5^{\circ}1' \sin(☾ - \varpi) + 2^{\circ}32' \sin(☾ - \odot)\cos(\varpi - \odot).$$

Aujourd'hui on écrirait (Tables de Damoiseau, p. 315)

$$\text{long. moy.} + 6^{\circ}17' \sin(☾ - \varpi) + 1^{\circ}16' \sin[2(☾ - \odot) - (☾ - \varpi)],$$

formule qui donnerait le même résultat que les prescriptions de Newton (p. 309). Il est bien aisé de s'assurer, en développant le second sinus, qu'elle est identique à celle de Ptolémée. La constante $5^{\circ}1'$ que ce grand astronome assignait à l'équation du centre répond effectivement à la somme de nos deux termes aux syzygies observées à 90° du périgée ou de l'apogée. Ptolémée l'avait calculée par trois éclipses de Lune observées, à Babylone, 700 ans avant J.-C. et par trois autres éclipses observées par lui-même à Alexandrie. Delambre ayant voulu vérifier ce calcul par les formules modernes a retrouvé le même nombre à $1'$ près [1].

[1] On ne saurait assez admirer l'effort de génie qui a conduit Ptolémée à la

Variation, équation annuelle.

Nous ne ferons que mentionner la *variation*, inégalité qui mérite bien son nom, car elle change tous les trois ou quatre jours. Nulle dans les syzygies, c'est-à-dire quand la Lune est en conjonction ou en opposition, elle est nulle encore dans les quadratures et atteint ses maxima dans les octants. Ainsi sa période est la moitié de la révolution synodique de la Lune, et cette inégalité a pour expression

$$39' \sin 2(☾ - ☉).$$

Elle a été découverte en 1600 par Tycho-Brahé, mais il paraît que les astronomes arabes l'avaient déjà notée.

L'*équation annuelle,* découverte aussi par Tycho-Brahé, offre plus d'intérêt. La distance de la Terre au Soleil est variable; la force perturbatrice du Soleil est au maximum lorsque la Terre est à son périhélie, au minimum lorsqu'elle est aphélie. Cette force ayant pour effet général d'écarter un peu la Lune de la Terre et d'augmenter le grand axe de son orbite, la durée de la révolution doit varier, conformément à la troisième loi de Kepler, dans l'intervalle d'un an et repasser l'année suivante par les mêmes valeurs. Nous y reviendrons un peu plus loin, à l'occasion de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune. L'argument de cette inégalité est évidemment l'anomalie du Soleil; sa formule est

$$11' \sin(☉ - \varpi).$$

Équation séculaire du moyen mouvement.

Enfin, pour terminer le chapitre des inégalités dont la découverte est due à l'observation, indépendamment de la théorie, men-

---

découverte de cette loi compliquée. Ptolémée est même parvenu à la concilier avec la règle de n'admettre pour les astres que des mouvements circulaires et uniformes, en faisant marcher la Lune sur un épicycle dont le centre se mouvait sur l'excentrique pris pour cercle déférent. A la vérité, si les anciens avaient fait un peu attention aux diamètres apparents de la Lune, ils auraient vu que cette hypothèse, qui exige une variation dans ces diamètres du simple au double, est inadmissible.

tionnons l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, que Halley a découverte en comparant les observations de son temps avec des éclipses très anciennement observées par les Arabes et les Grecs. Supposons que les anciennes éclipses nous conduisent à assigner à la Lune, il y a juste 2000 ans, une longitude moyenne A (longitude dépouillée de ses inégalités), mille ans plus tard, une longitude B, et aujourd'hui une longitude C. Pour en tirer le moyen mouvement annuel, on aura les équations

$$\mathcal{L}_0 = \text{A}, \quad \mathcal{L}_0 + 1000\,n = \text{B}, \quad \mathcal{L}_0 + 2000\,n = \text{C}.$$

Halley remarqua que ces équations ne sont pas compatibles, que $\frac{\text{B} - \text{A}}{1000}$ donne pour n une valeur plus faible que $\frac{\text{C} - \text{B}}{1000}$. En introduisant un terme séculaire mt^2, les équations deviennent

$$\mathcal{L}_0 = \text{A}, \quad \mathcal{L}_0 + 1000\,n + 1000000\,m = \text{B}, \quad \mathcal{L}_0 + 2000\,n + 4000000\,m = \text{C};$$

on en tire

$$m = \frac{\text{C} - 3\,\text{B} + \text{A}}{2000000} = 0'',001.$$

C'est l'accélération annuelle de la Lune. Elle se réduit à $\frac{0'',001}{(13)^2}$ à chaque révolution mensuelle. Cette infinitésimale accélération n'en produit pas moins $0'',001 \times 10000 = 10''$ par siècle, $40''$ au bout de deux siècles, $90''$ au bout de trois, et $4000''$ ou plus de 1° en 2000 ans. Or, quand il s'agit d'éclipses observées, même dans les temps les plus reculés, il est impossible de s'y méprendre, car quelques minutes de plus ou de moins sur la longitude de la Lune rendraient l'éclipse totale possible ou impossible dans les régions où les historiens en font mention (p. 331). On ne saurait donc méconnaître la réalité de cette accélération séculaire.

Laplace ayant établi, comme une conséquence inévitable de la loi d'attraction, l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements dans tout le système solaire, du moins lorsqu'on ne tient compte que des attractions mutuelles des corps qui le composent, il semblait qu'il fallut conclure ici à l'intervention de forces étrangères au système, telle que la présence d'un milieu très rare dont la résistance, en diminuant la vitesse linéaire, rapprocherait la Lune de la Terre et produirait l'accélération du moyen mouvement.

Mais ce milieu ne saurait agir sur la Lune sans faire sentir aussi son action sur les planètes et leurs satellites. Or on ne trouve nulle autre part trace de la moindre accélération. Le problème devait donc recevoir une autre solution. Laplace remarqua que la *variation* produit précisément une variation dans la durée de la révolution, périodique à la vérité, due à ce que la force perturbatrice du Soleil varie avec sa distance à la Terre, c'est-à-dire du périhélie à l'aphélie. Si donc cette distance augmentait peu à peu, la Lune, de moins en moins écartée de la Terre par l'action du Soleil, se rapprocherait insensiblement de notre globe, et la révolution mensuelle irait en s'accélérant. La distance moyenne a' de la Terre au Soleil est invariable, mais l'excentricité e' de son orbite subit une diminution séculaire. Or Laplace a découvert, dans l'expression théorique de la longitude moyenne de la Lune, un terme séculaire qui dépend précisément de cet élément, à savoir

$$-\tfrac{3}{2}x^2\int(e'^2 - e_0'^2)\,n\,dt.$$

La théorie du Soleil donne (p. 132)

$$e' = e_0' - 0,000000424\,t,$$

t étant exprimé en années. Par conséquent,

$$e'^2 - e_0'^2 = -0,000000848\,e_0'\,t.$$

En intégrant, on trouve qu'il faut ajouter à la longitude moyenne de la Lune

$$+\tfrac{3}{4}x^2 \times 0,000000848\,e_0'\,nt^2, \quad \text{avec } n = \frac{1296000''}{x} \text{ et } e_0' = 0,0168,$$

ou, en prenant le siècle pour unité, $+10'',34\,t^2$. C'est justement le résultat des observations.

Cependant il est arrivé ici, comme pour la progression du périgée, que le coefficient $\frac{3}{4}x^2$ n'est que le premier terme d'une série fort peu convergente dont la suite réduit beaucoup l'importance du premier. La série complétée par M. Adams ne donne plus que $5'',7$ pour l'accélération séculaire de la Lune. L'excès $4'',6$ de l'effet observé sur l'effet calculé n'a été rattaché par personne à la résistance d'un

milieu, car on n'en retrouve nulle part ailleurs la moindre trace[1], mais à un ralentissement excessivement faible de la rotation terrestre, que M. Delaunay attribue aux marées.

Tables de la Lune exclusivement basées sur la théorie de l'attraction.

Telles sont les inégalités que les astronomes avaient démêlées dans une longue série d'observations de la Lune. Lorsque Newton eut réussi à les rattacher à sa théorie, il pensa que cette théorie, plus développée, fournirait bien d'autres inégalités qui avaient échappé aux observateurs. Laplace réalisa complètement cet aperçu en donnant l'expression analytique de toutes les inégalités sensibles, en fonction des éléments des orbites de la Lune et du Soleil. Ces éléments sont, comme on l'a vu, pour la théorie, des constantes arbitraires qu'on ne saurait déterminer autrement que par l'observation; mais, une fois ces valeurs obtenues, celles de toutes les inégalités de la Lune en résultent sans qu'il soit nécessaire de recourir aux observations. Avant Laplace, les Tables de la Lune étaient entachées d'empirisme, en ce sens qu'on déterminait, par les observations, les coefficients des inégalités sans se soucier de les mettre d'accord avec la théorie. M. Damoiseau, de l'Académie des Sciences, est le premier et jusqu'ici le seul qui ait produit des Tables exclusivement basées sur la théorie. Le succès le plus complet a couronné ce grand effort; voici un bref aperçu de ses Tables.

Origine du temps, 1er janvier 1801 *à minuit, temps moyen de Paris.*

Longitude moyenne.........	111°.36′.42″,8	$+(307°.52'.41'',6)i$
Anomalie moyenne.........	205.29.58,4	(i nombre de siècles depuis 1801)
Longitude moyenne du nœud	13.54.54,2	
Inclinaison................	5. 8.59,8	
Excentricité en secondes....	6.17.19,7	

(1) Pour bien faire saisir la portée de cette remarque, il faut insister sur ce que cette accélération du mouvement moyen de la Lune est accompagnée d'une inégalité séculaire dans ceux du périhélie et des nœuds dont Laplace a rendu compte en les rattachant à la même cause, la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre. Si l'on essayait d'attribuer la première à toute autre cause, telle que la résistance de l'éther ou la propagation successive de la gravité, il serait impossible d'étendre cette explication aux variations des deux autres éléments, car il ne s'en produirait aucune dans l'une ou l'autre de ces hypothèses.

Telles sont les valeurs des éléments fournies par l'observation. La théorie donne :

Équation séculaire de la longitude moyenne..	$10'',8786\,i^2 + 0'',016\,i^3$
Équation de l'anomalie moyenne............	$50,0592\,i^2 + 0,073\,i^3$
Équation du nœud	$6,6690\,i^2 + 0,010\,i^3$
Mouvement séculaire de l'anomalie moyenne	$198°.49'.55'',0$
Mouvement séculaire du nœud............	$134\,.\,9\,.57\,,5$

Avec ces données, on est en état de calculer, pour une date quelconque $1801 + t$, la longitude moyenne u, l'anomalie moyenne x, la longitude moyenne ☾ — longitude moyenne ☉ $= \tau$, l'anomalie moyenne ☉ $= z$, enfin $y = x$ — longitude moyenne du nœud ascendant. On a, pour la longitude vraie (sans passer par celle de l'orbite et la réduction à l'écliptique) (¹) :

Équation du centre....	$u + 6°.17'.19'',7 \sin x + 12'.48'',8 \sin 2x + \ldots$
Évection.............	$+ 1.16.28,2 \sin(2\tau - x) + 31'',0 \sin 2(2\tau - x)$
Équation parallactique.	$- 2.\ 2,1 \sin\tau$
Variation............	$+ 39.29,7 \sin 2\tau\ldots$
Équation annuelle.....	$- 11.13,0 \sin z + \ldots$
	$- 6.51,8 \sin 2y$
	$+ 17,5 \sin(x - \tau) - 3'.31'',9 \sin 2(x - \tau)$
	$+ 3.12,2 \sin(2\tau + x)$
	$+ 3.26,7 \sin(2\tau - z - x)$
	+ ....
	$- 1,1 \sin($♀ $-$ ♁$)$
	$+ 0,7 \sin($♁ $-$ ♃$)$

La parallaxe dont la constante elle-même a été déterminée par la théorie a pour valeur

Constante............	$57'.\ 0'',9$
Équation du centre.....	$+ 3.\ 6,5 \cos x + 10'',2 \cos 2x + 0'',6 \cos 3x$
	$+ 34,4 \cos(2\tau - x)$
	$- 1,0 \cos\tau$
	$+ 28,5 \cos 2\tau$
	$- 0,3 \cos z$
	$+ 3,1 \cos(2\tau - x)$
	$+ 1,4 \cos(2\tau - z - x)$,
	....

(¹) La somme totale des quatre-vingts inégalités prises avec le signe + est de $8°57'29'',8$.

La latitude $90^\circ - \beta$ a pour expression, en notant d'un accent les symboles précédents, pour avertir qu'il faut leur ajouter la somme des équations de longitude, c'est-à-dire que ce sont des longitudes ou des anomalies vraies :

$$
\begin{aligned}
& 5^\circ.8'.59'',8 \sin y' + 12'',6 \sin 2y' \\
+ & \quad 8.47,8 \sin(2\tau' - y') \\
+ & \quad 14,4 \sin(y' - x') \\
+ & \quad 25,8 \sin(2x' - y') \\
+ & \quad 15,6 \sin(x' + y' - 2\tau') \\
+ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & \quad 1,0 \sin(2\tau' + y') + 0'',8 \sin(3y' - 2\tau') - 0'',7 \sin(y' - \tau').
\end{aligned}
$$

M. Delaunay, poussant encore plus loin le développement analytique des inégalités lunaires, en a calculé 1400. Le Bureau des Longitudes fait en ce moment construire de nouvelles Tables de la Lune d'après cette théorie, la plus complète qui existe. Elles remplaceront les Tables de Hansen, qui ne sont pas exemptes d'empirisme et qui commencent déjà à ne plus représenter suffisamment les observations.

Parallaxe du Soleil et aplatissement du globe terrestre déduits des inégalités lunaires.

Il s'agit de celles dont les coefficients dépendent de la parallaxe du Soleil et de l'aplatissement du globe terrestre. En ce qui concerne la première, nous venons de voir que la théorie en fait connaître le coefficient algébrique et l'argument. Avec l'argument $\tau = ☾ - ☉$, on choisit les observations où $\sin\tau$ prend les valeurs voisines des maxima $+1$ et -1, c'est-à-dire les syzygies, et les époques où il s'annule, c'est-à-dire les quadratures. De là on conclut la valeur numérique du coefficient. C'est en comparant ce nombre à son expression théorique que nous avons obtenu $8'',81$ pour la parallaxe du Soleil (p. 219).

L'inégalité due à l'aplatissement a pour expression, d'après la *Mécanique céleste*,

$$\frac{-(\mu - \frac{1}{2}q)}{g-1} \sin^2\pi' \sin\omega \cos\omega \sin ☾.$$

Les observations de Greenwich assignent $8'',59$ à ce coefficient,

dans lequel μ désigne l'aplatissement, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur (à l'équateur) et $g-1$ le rapport du moyen mouvement du nœud au moyen mouvement de la Lune. Voici le calcul :

$\pi' = 57'\ 2'',66$	$\log \sin^2 \pi'$.....	6,43984
$\omega = 23°28'$	$\log(g-1)$...	7,60411
en 1801.		8,83573
	$\log \sin\omega \cos\omega$.	9,56263
		8,39836
	$\log 206265''$....	5,31443
		3,71279
	$\log 8'',59$.......	0,93399
	$\log(\mu - \frac{1}{2}q)$.	7,22120
	$\mu - \frac{1}{2}q$.......	0,0016642
	$\frac{1}{2}q$...........	0,0017339
	μ.............	$0{,}0033980 = \frac{1}{294}$

Nous trouvons, par cette singulière voie, un aplatissement très voisin de $\frac{1}{292}$ auquel nous conduisent aujourd'hui les opérations géodésiques et les observations du pendule. En se reportant à ce qui a été dit (p. 219) sur l'inégalité parallactique, on trouvera bien justifiée cette remarque de Laplace : « Un astronome, sans sortir de son observatoire, en comparant ses observations de la Lune à la théorie, est donc en état de déterminer à lui seul la distance de la Terre au Soleil et la figure de notre globe, résultats qu'on ne croyait pouvoir atteindre que par de vastes triangulations et par des expéditions organisées à grands frais sur les deux hémisphères. »

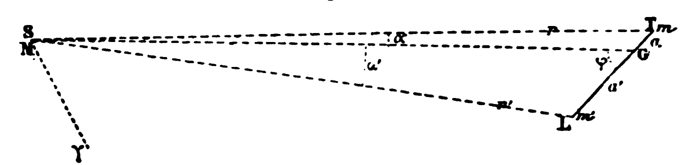
Calcul de l'inégalité mensuelle de la Terre.

Le petit système Lune-Terre se meut autour du Soleil comme si sa masse entière était réunie en son centre de gravité. Les deux astres décrivent autour de ce point des ellipses semblables, mais de dimensions inversement proportionnelles à leurs masses. Pour le faire comprendre, considérons, à un instant donné, les trois corps T, L, S avec leurs masses m, m', M. Désignons par r, R, r' les distances ST, SG, SL, par a, a' les distances GT et GL au centre

de gravité G, par φ l'angle aigu en G, par α, α' les angles en S.

La force qui meut la Terre vers le Soleil sera $\frac{f\text{M}m}{r^2}$; celle qui

Fig. 61.



meut la Lune sera $\frac{f\text{M}m'}{r'^2}$. En les multipliant par $\cos\alpha$ et $\cos\alpha'$, on aura leurs composantes parallèlement à SG. Les triangles donnent, en prenant R pour unité,

$$\cos\alpha = \frac{1 + a\cos\varphi}{r}, \quad \cos\alpha' = \frac{1 - a\cos\varphi}{r'}.$$

La résultante des forces mouvantes, appliquée au centre de gravité G, sera donc

$$f\text{M}m\,\frac{1 + a\cos\varphi}{r^3} + f\text{M}m'\,\frac{1 - a'\cos\varphi'}{r'^3}.$$

Les mêmes triangles donnent

$$r^2 = 1 + 2a\cos\varphi + a^2,$$
$$r'^2 = 1 - 2a'\cos\varphi + a'^2.$$

Développons $(1 + a\cos\varphi + a^2)^{-\frac{3}{2}}$ et $(1 - 2a'\cos\varphi + a'^2)^{-\frac{3}{2}}$ en nous bornant aux deuxièmes puissances des petites quantités a et a', puis divisons par la somme des masses $m + m'$; nous aurons, pour l'accélération en G,

$$\frac{f\text{M}}{m+m'}\left[m - 2am\cos\varphi - a^2 m\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\right]$$
$$+ \frac{f\text{M}}{m+m'}\left[m' + 2a'm'\cos\varphi - a'^2 m'\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\cos^2\varphi\right)\right];$$

mais, G étant le centre de gravité, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{m'}{m};$$

d'où, en désignant $a + a'$ par d,

$$a = \frac{dm'}{m + m'}, \quad a' = \frac{dm}{m + m'}.$$

Par substitution, les deux termes du premier degré en d se détruisent, et il vient finalement, en rétablissant R d'abord pris pour unité,

$$\text{Force accélératrice en G.....} \frac{fM}{R^2} \left[1 - \frac{d^2}{R^2} \frac{mm'}{(m + m')^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2} \cos^2 \varphi\right)\right].$$

Le second terme est insensible, car

$$\frac{d^2}{R^2} = \left(\frac{1}{386}\right)^2 = \frac{1}{150000},$$

et $\dfrac{mm'}{(m + m')^2} = \dfrac{1}{82}$, comme nous le verrons tout à l'heure.

On trouverait de même que la force accélératrice perpendiculaire à SG est tout à fait insensible. On voit donc que la seule force appréciable qui sollicite le système TL est dirigée vers le Soleil, est appliquée au centre de gravité G et a pour expression $\dfrac{fM}{R^2}$. Par conséquent c'est le point G qui décrira autour du Soleil une orbite elliptique conformément aux lois de Kepler. Seulement la masse sera $m + m'$, et c'est aussi celle qu'on donne ordinairement sous le nom de *masse de la Terre*.

La longitude du point T sera égale à celle du point G, calculée suivant les lois du mouvement elliptique et augmentée de α, angle qui se déduit de

$$\sin \alpha = \frac{a}{r} \sin \varphi = \frac{d}{R} \frac{m'}{m + m'} \sin \varphi,$$

à très peu près.

Or $\varphi = T - \alpha$ est sensiblement ☾ — ☉. Il résulte de là une petite inégalité dans les mouvements de T, dont la période sera le mois lunaire, c'est-à dire $29^j,5$. Elle aura pour expression

$$206265'' \frac{d}{R} \frac{m'}{m + m'} \sin(☾ - ☉).$$

En comparant des observations du Soleil faites aux époques où ☾ — ☉ est de 90° ou de 270°, c'est-à-dire vers les quadratures, on

a trouvé 6″,50 pour la valeur de ce coefficient. On aura donc, en remplaçant $\frac{d}{R}$ par $\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}$,

$$206265'' \frac{\sin\pi'}{\sin\pi} \frac{m}{m+m'} = 6'',50.$$

Masse de la Lune.

On en déduit

log 6″.50.....	0,81291
C^t log 206265″.	4,68557
log sin π′.....	8,21995
C^t log sin π′...	4,36931
	8,08774

$$\frac{m'}{m+m'} = \frac{1}{81,7}, \quad \text{d'où} \quad \frac{m'}{m} = \frac{1}{80,7}.$$

L'erreur probable de 6″,50 est au plus de $\pm 0'',05$; celle de $\frac{m'}{m}$ est donc inférieure à $\pm \frac{1}{130}$ environ, et celle du dénominateur 80,7 à $\pm$ 0,6.

Le rayon a de la petite orbite décrite mensuellement par la Terre autour du point G est $\frac{d}{81,7}$, ou, comme $d = 60,3\ (\rho)$ à peu près, elle ne dépasse pas les $\frac{3}{4}$ du rayon de notre globe. Le point G est donc toujours dans l'intérieur de la Terre. De là une inégalité mensuelle du rayon vecteur de la Terre. Après l'avoir calculée pour le point G, par les formules du mouvement elliptique, on doit lui ajouter

$$a\cos\varphi = \frac{6'',50}{206265''}\cos(☾ - ☉).$$

Comme l'orbite lunaire est inclinée de 5° sur l'écliptique, plan de l'orbite décrite par le centre de gravité G, la Lune se trouvera tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de ce plan, et la Terre, par contre, tantôt au-dessous, tantôt au-dessus. Ces petits écarts du centre de la Terre, vus du Soleil, sous-tendront un angle égal à moins d'une seconde. Réciproquement, le Soleil, vu de la Terre, paraîtra s'écarter de ce petit angle-là du plan de l'écliptique. De là une

petite latitude du Soleil dont les variations dépendront de ☾ — ☉. On en tient compte dans les éphémérides et dans les calculs qui exigent une grande précision.

Rotation de la Lune.

La Lune nous présente toujours la même face. Elle tourne donc autour d'un axe à peu près perpendiculaire au plan de l'écliptique dans un temps égal à celui de sa révolution autour de la Terre, c'est-à-dire en $27^{j},321$. Le jour, sur la Lune, est égal à sa révolution synodique ou de $29^{j}\frac{1}{2}$. En observant les taches de la Lune, Cassini a reconnu que son équateur est incliné de $2°45'$ sur l'écliptique et que le nœud descendant de cet équateur coïncide constamment avec le nœud ascendant de l'orbite lunaire. Newton, Lagrange et Laplace ont fait voir que ces relations si précises, qu'on ne retrouve dans aucune planète, sont dues à une seule et même cause, l'attraction que la Terre exerce sur le renflement ellipsoïdal de la Lune. La théorie montre en effet que la Lune doit avoir la figure d'un ellipsoïde à trois axes légèrement inégaux dont le plus long est tourné vers la Terre et la suit constamment, en oscillant un peu de part et d'autre de cette direction.

Ces oscillations mêmes, nommées *libration*, n'existeraient pas si le mouvement de translation autour de la Terre était uniforme comme la rotation. Laplace a prouvé que, si la rotation lunaire ne peut suivre les rapides variations périodiques du mouvement de révolution, elle est forcée du moins de participer à sa variation séculaire, en sorte que la merveilleuse égalité qui existe aujourd'hui entre les deux périodes se maintiendra toujours.

Nous voyons ici un exemple frappant de l'intime solidarité de tous les membres du système solaire. L'action perturbatrice des planètes fait diminuer peu à peu, de siècle en siècle, l'excentricité de l'orbite terrestre; cette diminution provoque une accélération séculaire dans la révolution de la Lune autour de la Terre, et la rotation de la Lune est forcée à son tour, par l'attraction de la Terre, de participer à cette accélération.

Ces effets n'iront pas en s'accumulant indéfiniment. Ce n'est que pour quelques centaines de milliers d'années que l'excentricité de notre orbite ira en diminuant; dans la suite des âges, cette diminu-

tion s'arrêtera et sera remplacée par une augmentation longtemps progressive. Les variations séculaires des éléments, que nous avons représentées par $at + bt^2 + \ldots$, ne sont au fond que des variations périodiques à périodes immenses; Lagrange et Laplace ont montré entre quelles limites elles seront maintenues.

Il est bien peu probable que la Lune ait été placée *dès l'origine* dans de telles conditions. La rotation d'un astre étant, en général, absolument indépendante de son mouvement de translation, l'égalité rigoureuse actuelle de ces deux durées n'a pas pu exister à l'origine. La Lune a dû avoir une rotation très différente de celle qu'elle possède aujourd'hui et dont la lenteur extrême est si exceptionnelle. Tout porte à croire que la Lune a été à l'origine en pleine fusion d'incandescence, qu'elle a été recouverte ensuite par une mince croûte solidifiée, et que les fortes marées produites dans la masse interne par l'attraction de la Terre ont ralenti progressivement sa rotation, de manière à l'amener, vers l'époque de sa consolidation définitive, à l'état actuel, qui est celui d'un équilibre légèrement oscillatoire et qui ne conserve plus d'autres traces de l'état primitif que l'énorme marée lunaire qui s'est figée dans la direction de notre globe.

CHAPITRE XXXIII.

APPLICATIONS DIVERSES DE LA THÉORIE DE LA LUNE.

Calendriers lunaires.

On retrouve ces calendriers chez toutes les populations nomades. Les phases de la Lune ont servi primitivement de signal pour indiquer les époques de réunion aux tribus disséminées par la vie errante des premiers âges; elles ont donné la première division du temps. Les saisons n'ayant pas alors le rôle important qu'elles ont pris chez les populations agricoles fixées au sol, les premiers calendriers n'eurent qu'un rapport fort mal défini avec l'année. En revanche, la période des phases fut étudiée et fixée avec exactitude. Nous avons vu qu'elle est de $29^j,5306$ ou $29^j\frac{1}{2}$ à peu près. Le calendrier des Turcs et des Arabes est fondé sur cette donnée. On compte par lunaisons, qu'on fait alternativement de 29 et de 30 jours, et qu'on groupe par douzaines, afin de tenir compte grossièrement du mouvement annuel du Soleil, dont la révolution est de 12 lunaisons et $\frac{1}{3}$. Une année lunaire se compose donc de $29^j,5 \times 12 = 354^j$. Elle ne saurait suivre longtemps la marche du Soleil; l'erreur serait de 34 jours, c'est-à-dire de plus d'un mois en trois ans. Elle est donc totalement impropre à guider les travaux agricoles; aussi les populations fixées qui, par tradition, ont conservé leur calendrier lunaire, doivent-elles en suivre un autre, exclusivement solaire, pour les besoins de tous les jours, à moins de les combiner tous les deux, par quelque compromis, comme ont fait les Hébreux.

Quant au calendrier purement lunaire, encore en usage aujourd'hui chez les Musulmans pour les usages civils et religieux, il a été réglé avec une précision parfaite. L'alternative de 29 et de 30 jours ne tenant compte que de la fraction $0,5$, il reste $0^j,0306$

d'erreur sur chaque lunaison. Au bout de trente années lunaires de douze mois chacune, cette erreur produirait un écart de $0,0306 \times 30 \times 12 = 11$ jours à très peu près. On en tient compte en intercalant 11 jours complémentaires en trente années, c'est-à-dire en donnant 30 jours, au lieu de 29, au dernier mois de certaines années. Celles-ci se nomment *abondantes*.

Grâce à cette intercalation, le calendrier arabe suit les phases de la Lune moyenne à moins d'un demi-jour près. Au bout de la première année d'un cycle de 30 ans, l'erreur est de $\frac{11}{30}$ de jour, de $\frac{22}{30}$ au bout de la seconde, et ainsi de suite. Convenons de prendre, pour fixer le rang de l'année dans cette période, celle dont le millésime divisé par 30 laisse pour reste 1, et, pour la trentième, celle dont le reste est zéro. Voici la règle instituée par les astronomes arabes : *L'année sera abondante quand le rang de l'année, dans le cycle trentenaire, multiplié par* $\frac{11}{30}$, *dépassera un nombre entier de* $\frac{15}{30}$ *ou de plus de* $\frac{15}{30}$.

L'ère est l'hégyre, date politico-religieuse qui répond au vendredi 12 juillet 622 ap. J.-C. Les mois sont

	Jours
Moharrem	30
Safar	29
Rébi 1er	30
Rébi 2e	29
Djoumada 1er	30
Djoumada 2e	29
Redjeb	30
Schaaban	29
Ramadan	30
Schouâl	29
Dzou'l Cadeh	30
Dzou'l Hedjeh	29 ou 30
	354 ou 355

La semaine est une très antique subdivision du mois lunaire en sept jours. Comme il est impossible de la maintenir en harmonie avec la Lune, elle sert simplement à compter les jours par des noms propres et à régler les jours fériés revenant à courte période. Mais elle constitue, à elle seule, une chronologie indépendante qui permet, en beaucoup de cas, de contrôler les dates ordinaires.

lorsqu'on y énonce à la fois le quantième du mois et le jour de la semaine. Voici les noms des jours chez les musulmans.

Youm-el-ahad	Dimanche.
Youm-el-thany	Lundi.
Youm-el-thaleh	Mardi.
Youm-el-arbaa...........	Mercredi.
Youm-el-khanis..........	Jeudi.
Youm-el-djouma.........	Vendredi (jour férié).
Youm-el-sebt............	Samedi.

D'après la règle d'intercalation trentenaire, le 1er de chaque mois répond à la nouvelle Lune, ou plutôt à la première apparition de son croissant, le soir, à l'ouest, peu après le coucher du Soleil, et la pleine Lune au 14 de chaque mois.

Nombre d'or.

Lorsque des populations entières se fixèrent au sol, adoptant la vie agricole, elles conservèrent leur ancien calendrier pour les époques légales et religieuses, mais elles sentirent bien vite le besoin d'un calendrier des saisons, réglé sur la marche du Soleil. Il fallut établir entre les deux computs une concordance quelconque, de manière à conclure aisément de l'un à l'autre. Les Athéniens envoyèrent dans ce but Méton en Orient (433 av. J.-C.); il en rapporta le nombre d'or. Voici en quoi consiste ce cycle :

$$1 \text{ année solaire} = 12{,}368265 \text{ lunaisons},$$

ou bien, en fraction continue,

$$1 \text{ an} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

A la troisième réduite, on trouve $\frac{235}{19}$, rapport approché à $\frac{1}{120000}$ près. Ainsi les phases de la Lune reviennent en coïncidence avec les mêmes dates du calendrier solaire tous les 19 ans. Il suffit donc

d'avoir noté, pendant la durée d'un pareil cycle, les dates des nouvelles et pleines Lunes pour être en état de rédiger les calendriers des années suivantes, c'est-à-dire d'y marquer d'avance les phases principales de la Lune, car ces phénomènes s'y reproduiront juste aux mêmes dates. On trouve à la première page de la *Connaissance des Temps* le nombre d'or pour l'année courante; c'est le rang de cette année dans le cycle de Méton.

Le cycle solaire est relatif aux calendriers solaires et aux jours de la semaine. Quatre années juliennes contiennent $365^j,25 \times 4$ ou $365^j \times 4 + 1^j$. Par conséquent 28 années juliennes contiendront $365 \times 4 + 1$ semaines. Au bout de 28 ans, les jours de même nom répondront aux mêmes dates. Si le 15 avril 1880, vieux style, est un mardi, le 15 avril 1908 sera encore un mardi, et dans aucune autre année intermédiaire on ne retrouvera la même coïncidence. C'est donc un moyen de vérifier les dates.

Fête de Pâques.

Cette fête a été fixée, d'après l'Exode, au quatorzième jour du premier mois lunaire de l'année, le mois où mûrissent les épis (en Égypte). De là, pour les Hébreux, la nécessité d'un calendrier lunaire concordant avec les saisons. Dans un tel calendrier, le quatorzième jour d'un mois quelconque est le jour de la pleine Lune. Le concile de Nicée ayant adopté le calendrier solaire des Romains, et voulant suivre autant que possible la tradition, fixa le jour de Pâques à la première pleine Lune du printemps; plus exactement, au dimanche qui suit la pleine Lune qui tombe le 21 mars ou après le 21 mars. On a imaginé pour ce calcul l'artifice des *épactes*, basé, comme les calendriers précédents, sur une lune fictive ayant même *longitude moyenne* que la Lune réelle, absolument comme les jours solaires moyens se règlent sur un soleil fictif ayant même longitude moyenne que le Soleil vrai. Ne pouvant exposer ici ce système, nous donnerons, sans démonstration, la règle de Gauss qui le remplace. Soit M le millésime de l'année : désignons par a, b, c, d, e les restes des divisions suivantes

$$\frac{M}{19}, \quad \frac{M}{4}, \quad \frac{M}{7}, \quad \frac{19a + x}{30}, \quad \frac{2b + 4c + 6d + y}{7}.$$

La fête de Pâques sera le $22 + d + e$ mars ou, ce qui revient au même, le $d + e - 9$ avril. S'il s'agit du calendrier julien, $x = 15$, $y = 6$, à perpétuité. Pour le calendrier grégorien, on a :

De 1583 à 1699.	De 1700 à 1799.	De 1800 à 1899.	De 1900 à 1099.
$x = 22$	$x = 23$	$x = 23$	$x = 24$
$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$	$y = 5$

Par exemple, en 1882, on a $x = 23$, $y = 4$; puis on trouve

$$a = 1,\quad b = 2,\quad c = 6,\quad d = 12,\quad e = 6;$$

par conséquent, le jour de Pâques tombe le $12 + 6 - 9$ ou le 9 avril.

Cette fête ne saurait arriver plus tôt que le 22 mars ni plus tard que le 25 avril.

Ajoutons que les inégalités des mouvements vrais de la Lune et du Soleil s'élèvent à une dizaine de degrés que la Lune ne parcourt qu'en $0^j,8$; les phases de ces divers calendriers, réglés sur des mouvements moyens, peuvent donc différer de près d'un jour des phases réelles, sans compter les petites erreurs de l'intercalation.

CHAPITRE XXXIV.

ÉCLIPSES DE LUNE ET DE SOLEIL.

Période chaldéenne.

Les Anciens attachaient une grande importance à ces phénomènes. Ils avaient réussi à les prédire avec assez d'exactitude, grâce à une période découverte par les observateurs de Babylone, et ils trouvaient, dans le succès de ces prédictions, un moyen de frapper les esprits et de démontrer à tous la puissance et la sûreté de leur science. Leurs observations ont même conservé de nos jours une grande valeur, parce qu'une éclipse de Lune ou de Soleil, de Soleil surtout, fixe les positions relatives des trois astres avec une précision qu'on était loin d'atteindre dans les autres genres d'observation. On se sert encore aujourd'hui, pour la théorie de la Lune, des éclipses observées à Babylone il y a 25 siècles et conservées dans l'*Almageste*.

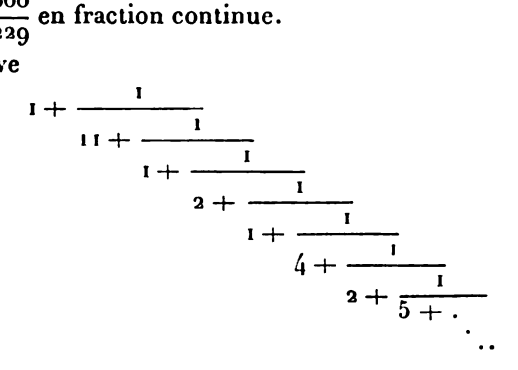
Il n'était pas difficile de voir que les éclipses ne se produisent qu'aux syzygies, lorsque la Lune se trouve en même temps dans l'écliptique ou très près de ce plan. Partout ailleurs, aux oppositions, la Lune pleine passe au-dessus ou au-dessous du cône d'ombre de la Terre ; aux conjonctions, le cône d'ombre que la Lune nouvelle projette passe au-dessus ou au-dessous de notre globe. En tenant un registre de ces phénomènes pendant des siècles, les anciens finirent par remarquer que les éclipses (relativement à un même nœud) mettaient un temps déterminé, environ 18 ans, à parcourir l'écliptique, et qu'au bout de ce temps (223 lunaisons) elles se reproduisaient dans le même ordre. C'était un moyen de prédiction, car ayant formé pendant 223 lunaisons consécutives le tableau de tous ces phénomènes, comprenant 41 éclipses de Soleil et 29 de Lune, avec leurs caractères et leurs dates, il suffisait

d'ajouter 223 lunaisons, c'est-à-dire 18 ans 11 jours, à la date de l'un d'eux pour retomber sur celle d'un phénomène semblable et placé exactement de la même manière dans la période suivante. C'est ainsi, du reste, qu'on étudie, encore aujourd'hui, la plupart des phénomènes météorologiques dont on ignore la cause ou la loi. Par exemple, on compulse les anciens registres d'observation pour y chercher la période des grands hivers, celle des étés chauds et secs, etc., dans l'espoir d'arriver à en prédire le retour. On n'y a guère réussi, parce que ces phénomènes-là sont bien plus compliqués que les mouvements célestes.

Il est facile d'expliquer le succès des Chaldéens. Chaque éclipse s'opère à la rencontre plus ou moins exacte de trois points circulant autour de la Terre indépendamment l'un de l'autre, le centre du Soleil, le centre de la Lune, le nœud ascendant de l'orbite lunaire. La période de rencontre des deux premiers est de $29^j,53060$; la période de rencontre des deux derniers est de $27^j,21229$ (p. 302). Si le rapport de ces deux périodes était égal à celui de deux nombres entiers assez simples, m et n, au bout de m lunaisons ou de n révolutions draconitiques tout se retrouverait dans le même ordre, du moins en supposant les mouvements uniformes, et les relations de position qui se présenteraient dans la seconde série seraient la reproduction exacte de celles de la première. Si donc, dans la première, on avait compté 41 éclipses de Soleil et 29 de Lune, plus ou moins complètes, on retrouverait dans la seconde série les mêmes éclipses se succédant dans le même ordre, avec le même caractère, à m lunaisons d'intervalle des premières.

Pour chercher ces deux nombres entiers, réduisons la fraction $\frac{29,53060}{27,21229}$ en fraction continue.

On trouve



$$1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}}}}$$

Les réduites successives sont $\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{38}{37}, \frac{51}{47}, \frac{242}{223}, \ldots.$

Arrêtons-nous à la dernière, parce qu'il se trouve qu'au bout de 223 lunaisons le nœud a presque fait le tour de l'écliptique. Pour s'assurer du degré d'approximation, on n'a qu'à transformer ces deux termes en jours :

$$\begin{aligned} &223 \text{ lunaisons} &&= 6585^j,37, \\ &242 \text{ mois draconitiques} &&= 6585,37. \end{aligned}$$

C'est 18 ans 11^j (10^j s'il y a eu 5 bissextiles). Au bout de ce temps les trois mobiles reviennent sensiblement aux mêmes positions. On compte dans cette période 41 éclipses de Soleil et 29 de Lune. Si une éclipse totale de Soleil, par exemple, a été enregistrée à une certaine époque, il suffira d'ajouter à cette date 18 ans 11^j, ou un multiple de cette période, pour retomber sur une autre éclipse totale (¹). C'est ainsi que Thalès a dû procéder pour annoncer l'éclipse totale de l'an 584 avant J.-C., éclipse dont les historiens ont fait mention parce qu'elle a mis fin à la guerre des Mèdes et des Perses.

On ne manquera pas de remarquer que cette période des éclipses est uniquement basée sur les mouvements *moyens* du Soleil, de la Lune et du nœud. Or nous avons vu que les inégalités de la Lune et du nœud peuvent très bien s'élever à 8° ou 9°; celles du Soleil vont à près de 2°. Il semble donc que la période chaldéenne ne peut remettre ces trois mobiles en mêmes positions relatives qu'à 10° près. S'il en était réellement ainsi, la règle qu'on en a déduite pour prédire les éclipses devrait se trouver souvent en défaut, car nous allons voir qu'un pareil écart serait capable d'empêcher une éclipse de se reproduire, ou de transformer une éclipse totale en une éclipse à peine perceptible. Cependant on sait par expérience qu'elle est très exacte. Ainsi les éclipses totales, à durées exceptionnelles, de 1868 et de 1886 répondent parfaitement à l'éclipse de 1850, quand on ajoute à la date de celle-ci la période ou le double de la période chaldéenne.

(¹) Ou du moins très considérable. Au reste, si l'éclipse est totale pour quelque région de la Terre, celle de la période suivante ne le sera pas nécessairement pour les mêmes points.

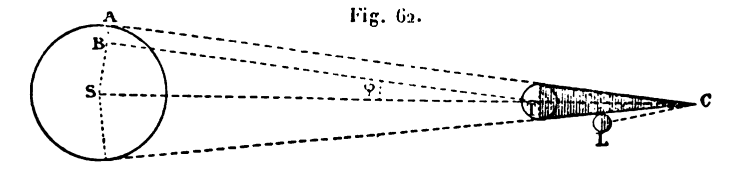
C'est que ce cycle tient plus qu'il ne promet. Nous avons vu déjà que la révolution anomalistique de la Lune est de $27^j,5545$. Eh bien, 239 de ces révolutions font encore $6585^j,5$, ce qui ne diffère de la période chaldéenne que de $\frac{1}{6}$ de jour. Ainsi, à 18 ans 11^j d'intervalle, le Soleil, la Lune, son nœud, son périgée, se retrouvent aux mêmes points; le périgée du Soleil revient au sien à une dizaine de degrés près, ce qui est insignifiant ici. C'est ce singulier concours de quatre mobiles, presque de cinq, qui fait le mérite de cette curieuse et utile découverte des temps les plus anciens.

Limites des éclipses.

Pour savoir, indépendamment de cette période, si une éclipse se produira ou non à une syzygie, il suffit de calculer pour cette date la distance de la Lune à son nœud le plus voisin. S'il s'agit d'une éclipse de Lune, l'éclipse n'aura lieu que si $L - N < 12°$. Pour une éclipse de Soleil, il faut que $L - N$ soit $< 17°$. Ces limites montrent même pourquoi il y a plus d'éclipses de Soleil que de Lune dans la période précédente. Le rapport des nombres $\frac{29}{41}$, qui exprime leur fréquence relative, est bien celui de ces limites 12 et 17, qui expriment leurs possibilités.

On arrive fort simplement à ces nombres en considérant la figure suivante, relative à une éclipse de Lune. Si l'on mène TB parallèle à AC, l'angle f du cône d'ombre terrestre sera donné, ρ' étant le rayon du Soleil et ρ celui de la Terre, par

Fig. 62.



$$\sin f = \frac{\rho' - \rho}{ST} = \sin \frac{1}{2} \Delta' - \sin \pi',$$

d'où

$$f = \frac{1}{2} \Delta' - \pi'.$$

La longueur h du cône d'ombre sera

$$TC = \frac{\rho}{\sin f} = h;$$

si r est le rayon vecteur de la Lune, la section droite de ce cône, dans l'endroit où la Lune le parcourra, sera

$$(h - r)\sin f.$$

Pour qu'il y ait au moins contact entre la Lune et le cône d'ombre, il faut que la somme des demi-diamètres angulaires de cette section et de la Lune, vues du point C, soit égale à la distance des centres. Si la Lune ne fait que raser le cône d'ombre, cette somme exprimera la distance du centre de la Lune à l'écliptique. En la divisant par le rayon vecteur r, on aura le sinus de la latitude de la Lune ou de $90° - \beta$. Et comme

$$\sin(L - N) = \cot i \cot \beta,$$

on sera en état de calculer L — N.

Faisons ce calcul pour une éclipse de Lune dans les circonstances les moins favorables, celles où la Lune est périgée et le Soleil apogée. On prendra (ρ) pour unité. La valeur la plus faible de $\frac{1}{2}\Delta'$ est de $15'44''$; par conséquent

$$f = \tfrac{1}{2}\Delta' - \pi' = 15'35'', \quad h = 221.$$

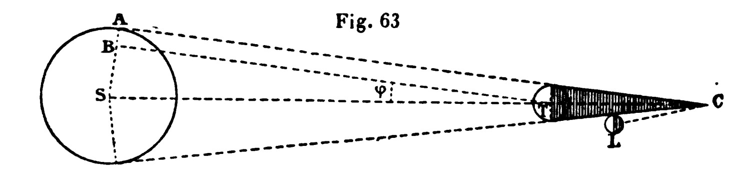
La plus petite valeur de r est 57. Le rayon de la section du cône d'ombre que la Lune traversera sera $\frac{221 - 57}{221} = 0,742$. Et comme le rayon $\varkappa$ de la Lune est de 0,273, on aura pour leur somme 1,015. Par conséquent $\cot\beta = \frac{1,015}{57}$, et l'on trouve finalement $L - N = 11°47'$, en prenant pour i sa plus petite valeur. Si donc la Lune au moment de l'opposition est à 12°, ou plus, du nœud, l'éclipse est impossible. On trouverait de même pour les éclipses du Soleil la limite 17°.

Calcul d'une éclipse de Lune.

Les phases d'une éclipse de Lune se produisent au même instant pour tous les observateurs; il n'y a pas lieu de tenir compte de leur position géographique. On s'en servirait même fort avantageusement pour déterminer, sans calcul, les longitudes terrestres,

comme par les éclipses des satellites de Jupiter, si les phases d'une éclipse de Lune étaient susceptibles d'être observées avec précision. Nous ferons d'abord abstraction de l'atmosphère.

Fig. 63



L'éclipse partielle ou totale commencera et finira (*fig.* 63) lorsque la sphère L touchera extérieurement ou intérieurement le cône d'ombre qu'elle traverse. A ces deux instants, le demi-diamètre apparent $\frac{1}{2}$D de L, vu du point C, sera égal à LCT $-f$ ou à $f-$ LCT. Il faut donc exprimer ces angles $\frac{1}{2}$D et LCT en fonction du temps. Les coordonnées de la Lune étant, à la date t, $\mathrm{TL}=r$, L et β, celles du Soleil $\mathrm{ST}=r'$ et $\odot$, celles du sommet C seront TC et $\delta=\odot-180°$. Cela posé, prenons des axes mobiles : la droite TC pour axe des x, une perpendiculaire à TC dans le plan de l'écliptique pour les y, et une normale à ce plan pour les z. Les coordonnées rectilignes de la Lune, auxquelles on joindra leurs variations horaires a, b, c, seront, à la date $t+\theta$,

$$z=r\cos\beta+a\theta,\quad x=r\sin\beta\cos\mathrm{L}+b\theta,\quad y=r\sin\beta\sin\mathrm{L}+c\theta.$$

Transportons l'origine en C et changeons le sens de l'axe des x : les nouvelles coordonnées z', x', y' seront

$$z'=z,\quad x'=\mathrm{TC}-x,\quad y'=y.$$

Soit d la distance variable CL ou $\sqrt{z'^2+x'^2+y'^2}$, nous aurons

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{D}=\frac{\iota}{d},\quad \cos\mathrm{LCT}=\frac{x'}{d},$$

d'où

$$\sin\mathrm{LCT}=\frac{\sqrt{z'^2+y'^2}}{d}.$$

La relation susdite entre les angles LCT, $\frac{1}{2}$D et f, c'est-à-dire l'équation des éclipses

$$\mathrm{LCT}-f=\pm\tfrac{1}{2}\mathrm{D}$$

deviendra, en prenant les sinus,

$$\frac{\sqrt{z'^2+y'^2}}{d}\cos f - \frac{x'}{d}\sin f = \pm\frac{\iota}{d}$$

ou, en élevant au carré,

$$z'^2+y'^2=(x'\operatorname{tang} f \pm \iota \operatorname{séc} f)^2.$$

On portera dans cette relation les valeurs de z', x', y', en fonction du temps θ, ce qui donnera, pour chaque signe, une équation du second degré en θ dont les deux racines θ' et θ'' résoudront la question. Avec le signe —, par exemple, l'heure du premier contact intérieur, ou le commencement de l'éclipse totale, sera $t+\theta'$; le deuxième aura lieu à l'heure $t+\theta''$.

Si on voulait calculer l'instant où un cirque de la Lune pénètre dans le cône d'ombre, il faudrait déduire, d'une carte de la Lune, les coordonnées z'', x'', y'' de ce point rapportées au centre de la Lune, et résoudre l'équation

$$(z'+z'')^2+(y'+y'')^2=(x'+x'')^2\operatorname{tang}^2 f,$$

qui exprime que le point considéré se trouve sur le cône d'ombre.

En réalité, la lumière du Soleil n'est pas complètement interceptée dans une éclipse totale de Lune, en sorte que cet astre ne disparaît pas tout à fait. L'interposition de notre atmosphère augmente l'angle f du double de la réfraction horizontale ou d'environ 1°. La longueur de ce cône d'ombre pure, calculée par

$$\sin(f+1^\circ)=\frac{1}{\mathrm{TC}},$$

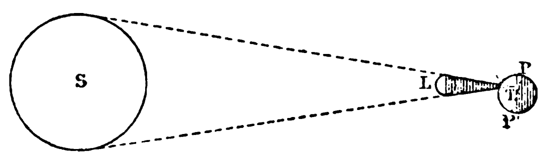
n'est que de 42, tandis que la plus courte distance de la Lune à la Terre va à 57. Aussi la Lune, même quand elle se trouve entièrement plongée dans l'ombre géométrique, est-elle encore teinte d'une lueur rose, analogue aux couleurs de l'aurore. Cependant l'atmosphère, qui fait ici l'effet d'une lentille convergente, joue aussi le rôle d'un absorbant pour la lumière, dans les couches basses surtout. L'ombre incomplète projetée sur la Lune est mal terminée; et, grâce à cette circonstance sans doute, le cercle de l'ombre paraît plus grand de $\frac{1}{120}$ environ qu'il ne l'est en réalité;

par suite, dans le calcul toujours peu rigoureux de ces phénomènes, les astronomes se croient obligés d'ajouter 15″ ou 16″ à l'angle f ($\frac{1}{60}$ environ).

Éclipses totales de Soleil.

Ces beaux phénomènes sont bien autrement précis que les précédents, parce que la Lune n'a pas d'atmosphère et que tout se passe, à très peu près, comme s'il s'agissait du contact géométrique de deux cercles. En même temps que le cône d'ombre projeté par la Lune balaye la surface de la Terre, celle-ci tourne autour de son axe PP′ : (*fig* 64) pour déterminer les instants où l'un de

Fig. 64.



ses points, Paris par exemple, entre dans le cône d'ombre ou en sort, il faut tenir compte à la fois de ces deux mouvements. Déterminons d'abord la ligne des points où l'éclipse paraît centrale, c'est-à-dire des points où la droite SL perce l'ellipsoïde terrestre.

A une date donnée, à l'heure sidérale H_p, temps de Paris, le globe est rencontré par SL en un point dont les coordonnées géocentriques seront ρ, φ et L. Rapportons ce point à un système d'axes mobiles, celui des x étant dirigé vers le point γ, celui des y (dans l'équateur) à 90° du premier dans le sens direct, et l'axe des z étant la ligne des pôles. On aura, par la *Connaissance des Temps,* à l'heure H_p, pour le Soleil,

$$z' = r' \cos\delta', \quad x' = r' \sin\delta' \cos Æ', \quad y' = r' \sin\delta' \sin Æ',$$

et pour la Lune

$$z = r\cos\delta, \quad x = r\sin\delta\cos Æ, \quad y = r\sin\delta\sin Æ;$$

r' et r devront être exprimés au moyen du rayon équatorial de la Terre pris pour unité. Les équations de la droite SL seront, avec

les coordonnées courantes X, Y, Z,

$$\frac{Z - z'}{z - z'} = \frac{X - x'}{x - x'} = \frac{Y - y'}{y - y'},$$

et celle de l'ellipsoïde terrestre

$$\frac{Z^2}{1 - e^2} + X^2 + Y^2 = 1.$$

Ces dernières équations fourniront les coordonnées ζ, ξ, η du point de rencontre. On aura les coordonnées géographiques du point par

$$\zeta = \rho \cos\varphi, \quad \xi = \rho \sin\varphi \cos(L + H_p), \quad \eta = \rho \sin\varphi \sin(L + H_p),$$

car à l'heure sidérale H_p, temps de Paris, le méridien de Paris fait l'angle H_p avec celui du point γ, et le méridien du lieu fait l'angle $L + H_p$ avec ce même méridien initial. Enfin, de la colatitude géocentrique φ, on déduira la colatitude géographique λ par

$$\tang\lambda = (1 - e^2)\tang\varphi,$$

ou en retranchant ψ de l'angle φ.

On recommencera le calcul pour d'autres heures H'_p, H''_p, ... : on obtiendra ainsi les coordonnées d'une série de points situés sur la courbe de centralité (*voir* la figure de la p. 340).

Prédiction des contacts intérieurs en un lieu donné.

Lorsqu'on aura tracé la courbe de la centralité sur une carte, on sera en état de juger, à quelques minutes près, des instants où se produiront les contacts intérieurs en un point quelconque M, assez voisin de cette trajectoire pour que l'éclipse y soit totale, sinon centrale. Soit t la moyenne de ces instants; on prendra dans les éphémérides, aux instants $t - 10^m$, $t + 10^m$, les coordonnées Æ et δ du Soleil et de la Lune et leurs demi-diamètres, en ayant soin de rapporter les δ de la Lune au pied N de la grande nor-

male AN de l'observateur [1]. On calculera ensuite les azimuts et les z de ces astres aux mêmes instants $t - 10^m$ et $t + 10^m$, de manière à obtenir les variations horaires a, b, c de leurs différences. En sorte qu'à l'instant $t + \theta$ on aura pour les différences d'azimut des distances zénithales et des demi-diamètres :

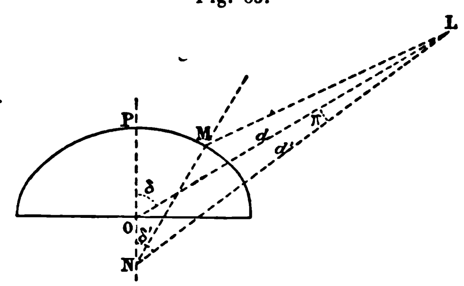
$$A - A' + a\theta, \quad z - z' + b\theta, \quad \tfrac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta'_1) + c\theta.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que la distance angulaire des deux astres est égale à la somme ou à la différence de leurs demi-diamètres apparents $\frac{1}{2}\Delta_1$, $\frac{1}{2}\Delta'_1 + c\theta$. C'est le problème dont nous avons déjà donné la solution à propos du passage de Vénus (p. 215). On aura donc la même équation

$$\left(\frac{\Delta_1 - \Delta'_1}{2} + c\theta\right)^2 = \left(z - z' + b\theta\right)^2 + \left(A - A' + a\theta\right)^2 \sin z \sin z'.$$

(1) Soient M le lieu de l'observateur, N le pied de la grande normale, L la Lune située en dehors du plan PMN de la *fig.* 65, δ sa distance polaire géocentrique, δ'

Fig. 65.



sa distance polaire vue du point N, π la petite parallaxe due au déplacement de O en N, d et d' les distances OL et NL; on aura

$$d' \sin\pi = \text{ON} \sin\delta.$$

ON est égal à $\text{N}e\cos\lambda$; d' ne diffère pas sensiblement de d; par conséquent,

$$\pi = \text{PN}e\cos\lambda\sin\delta,$$

P étant la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune. Dès lors la distance polaire rapportée au point N sera $\delta - \pi$, δ étant la distance polaire de l'éphéméride.

Cela posé, on calculera, par les formules ordinaires, l'azimut A et la distance zénithale vue du point N et, pour ramener celle-ci au point M, il suffira de lui ajouter la parallaxe p donnée par

$$\tan p = \frac{\text{N} \sin \text{P} \sin z}{1 - \text{N} \sin \text{P} \cos z}.$$

Les deux racines de cette équation donneront les instants des contacts intérieurs, les seuls qu'on observe avec exactitude.

Comme les z et les A ne varient pas, en général, proportionnellement au temps, on tiendra compte, si cela est nécessaire, des termes du second ordre en θ en calculant non plus deux, mais trois positions des deux astres à des intervalles équidistants.

La même équation sert pour les contacts extérieurs en remplaçant la différence par la somme des rayons.

En dehors des phénomènes physiques si remarquables que présentent les éclipses, leur importance est bien diminuée par la facilité qu'on a aujourd'hui de se procurer d'excellentes observations méridiennes de ces deux astres. Mais, pour les temps anciens, les éclipses seules fournissent des données précises sur la position relative du Soleil et de la Lune et un contrôle précieux pour les Tables de notre satellite. Une très faible erreur sur la position de ce dernier astre déplacera notablement la ligne de centralité; si donc l'histoire rapporte qu'à une certaine date une éclipse totale a été observée en un certain lieu, il en résulte un document très précieux pour fixer la position de la Lune, à cette date, par rapport au Soleil, dont les coordonnées sont parfaitement déterminables. C'est ainsi que les éclipses de Thalès en — 584, de Larissa en — 556, de Xerxès en — 479, d'Agathocles en — 309, etc., jouent un grand rôle dans l'étude de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune.

Il nous reste à donner un détail qui est de nature à faciliter l'observation : c'est la position des points du disque solaire où les contacts avec le disque de la Lune doivent s'effectuer. L'équation des éclipses peut s'écrire, avec une arbitraire M, d étant la distance angulaire des centres,

$$d \sin M = (A - A') \sin \frac{z + z'}{2} \text{ (}^1\text{)}, \qquad d \cos M = z - z'.$$

M sera l'angle que fait l'arc d, de centre à centre, avec le vertical du Soleil. Si on le calcule pour le moment du premier contact, on

---

(1) On peut en effet remplacer, sans erreur sensible, dans l'équation des éclipses le facteur $\sin z \sin z'$ par $\sin^2 \frac{z + z'}{2}$.

saura que le point où le disque solaire sera touché par celui de la Lune se trouve à M degrés à droite du vertical du Soleil, en les comptant sur le disque lui-même autour du centre. Les mêmes formules s'appliquent, avec des modifications fort simples, aux contacts extérieurs.

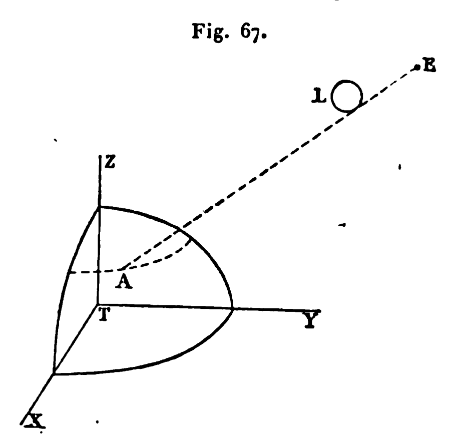
Nous ne saurions insister davantage sur cette question; bornons-nous à mettre sous les yeux du lecteur la planche ci-jointe (*fig.* 66), qui représentait, dans la *Connaissance des Temps* de 1882, les détails de l'éclipse totale du 17 mai, calculés, pour toute la Terre, par l'excellente méthode de Bessel, qu'il nous est impossible d'exposer ici avec les détails qu'elle comporte.

Occultation d'une étoile par la Lune.

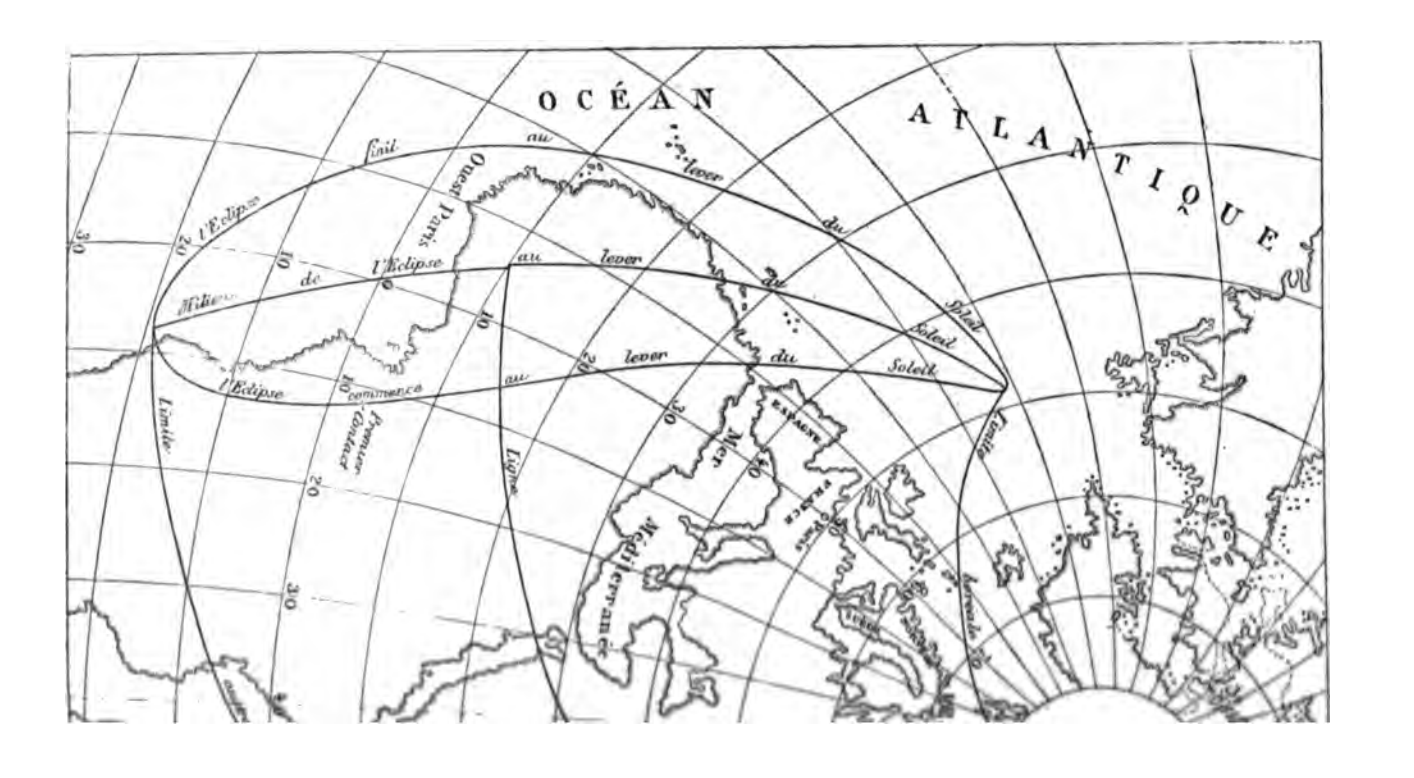
C'est évidemment le même problème, et nous lui donnerons la même solution en considérant les coordonnées de l'un des astres comme invariables et son demi-diamètre apparent comme nul.

Quelles que soient les coordonnées adoptées, l'équation finale aura toujours la même forme; la difficulté se réduit au calcul des parallaxes, calcul plus simple pour le système des A, Z que pour celui des Æ, δ ou des L, β. Voici une autre méthode dans laquelle nous emploierons les coordonnées rectilignes.

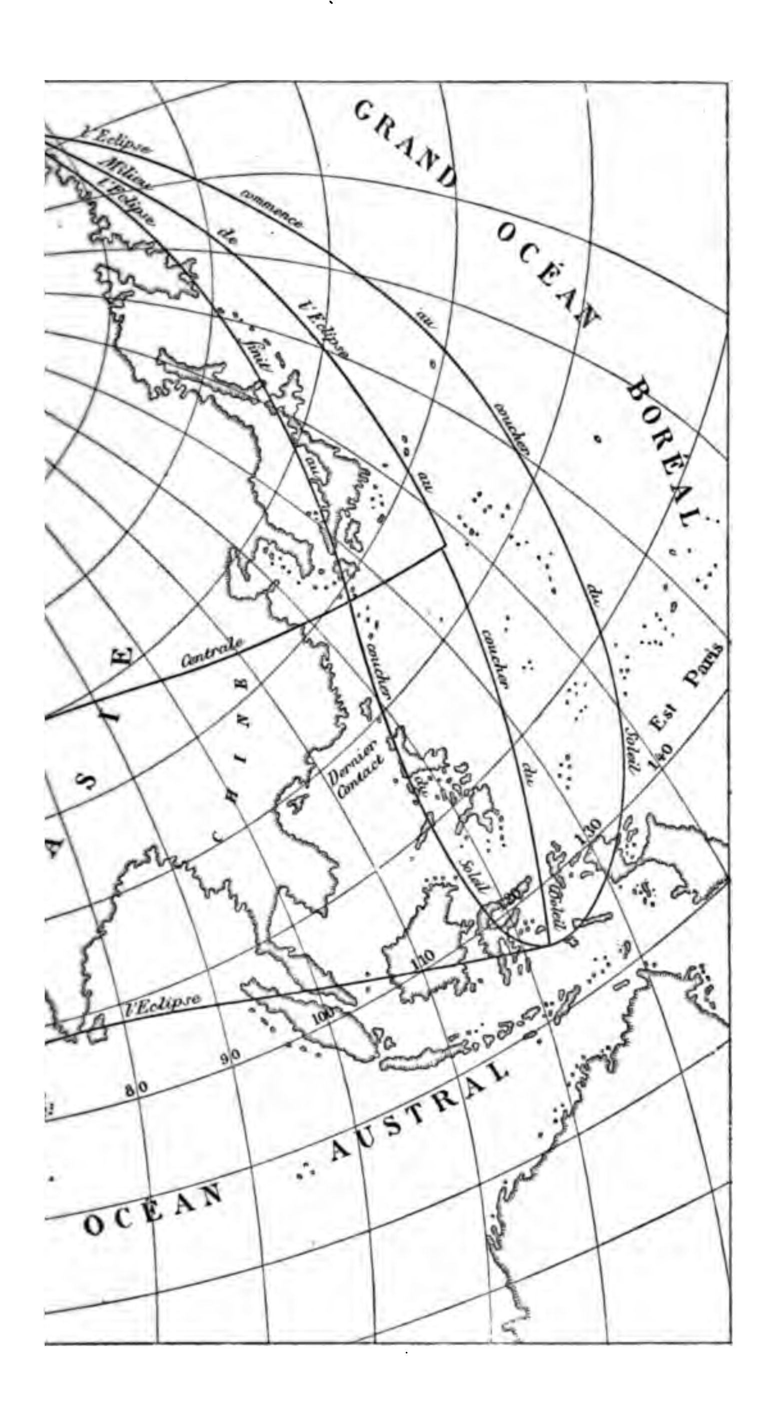
Fig. 67.



On calculera pour l'instant H, voisin du phénomène, les coordonnées équatoriales z, x, y de la Lune et leurs variations ho-



OCÉAN ATLANTIQUE
fait au lever du Soleil
Milieu de l'Éclipse au lever du Soleil
l'Éclipse commence au lever du Soleil
l'Éclipse
Ouest Paris
Premier Contact
Limite
Ligne
Limite boréale
Mer Méditerranée
ESPAGNE
FRANCE
Paris


GRAND OCÉAN BORÉAL
OCÉAN AUSTRAL
ASIE
CHINE
Centrale
Dernier Contact
Est Paris
l'Eclipse
80
90
100
110
130
140

raires. $Æ$ et δ étant les coordonnées de l'étoile, on en déduira par

$$\cos\alpha = \cos\delta, \quad \cos\beta = \sin\delta \cos Æ, \quad \cos\gamma = \sin\delta \sin Æ,$$

les angles α, β, γ que la droite visuelle AE fait avec les axes. Désignons enfin par L, φ, ρ les coordonnées géocentriques de l'observateur placé en A. L étant compté, comme l'heure sidérale H, à partir du méridien de Paris, on en déduit les coordonnées rectangulaires ζ, ξ, η. L'immersion de l'étoile derrière le disque de la Lune aura lieu à l'instant où le bord de cet astre touchera la droite AE, c'est-à-dire où la distance du centre L à AE sera égale à 0,27264 (ici l'unité est partout le rayon équatorial terrestre).

Cette condition s'écrit ainsi :

$$\overline{0,27264}^2 = (z-\zeta)^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$
$$-[(z-\zeta)\cos\alpha + (x-\xi)\cos\beta + (y-\eta)\cos\gamma]^2.$$

Si l'on joint à ces termes la variation horaire de chacun d'eux multipliée par l'inconnue θ, on aura une équation du second degré dont les racines θ' et θ'' donneront, pour le lieu A, dont la longitude est L :

Immersion .... à $t + \theta' + L$, heure du lieu A,
Émersion .... à $t + \theta'' + L$.

On évitera l'introduction de grands nombres en retranchant, des coordonnées de la Lune, les projections sur les axes de la droite LB menée, parallèlement à AE, jusqu'au point B où elle perce le plan du parallèle terrestre de l'observateur A. LB sera connu par

$$z - \text{LB}\cos\alpha = \zeta = \rho\cos\varphi,$$

et les coordonnées du point B, qui remplacera dès lors le centre de la Lune, seront

$$z' = \zeta, \quad y' = y - \text{LB}\cos\beta, \quad x' = x - \text{LB}\cos\gamma.$$

Le carré de la distance du point B à AE sera alors

$$(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 - [(x'-\xi)\cos\beta + (y'-\eta)\cos\gamma]^2,$$

qu'il faudra égaler à $\overline{0,27264}^2$.

Ces phénomènes sont frappants. La disparition de l'étoile ou sa réapparition sont instantanées et s'observent à moins de $0^s,1$. Comme la Lune se meut à raison de $0'',5$ par seconde de temps, une erreur de $0^s,1$ produit ici une erreur de $0'',05$ sur les coordonnées de la Lune. Pour fixer les idées, supposons que la Lune passe centralement sur une étoile; on pourra déduire son diamètre angulaire des instants des deux contacts avec une très grande précision. Si la Lune avait une atmosphère, cette durée serait diminuée du quadruple de l'effet de la réfraction horizontale.

Celle-ci est de $33'$ pour la Terre. Une telle atmosphère produirait sur la direction de l'étoile une déviation de $66' = 3960''$. Comme il n'y a pas plus de $1''$ d'incertitude sur le diamètre de la Lune, on est en droit de conclure, des occultations si fréquemment observées, que l'atmosphère lunaire, si elle existait, réfracterait 8000 fois moins la lumière que la nôtre. En la supposant constituée des mêmes gaz, sa densité serait 8000 fois moindre.

Détermination des longitudes géographiques par les observations lunaires.

Puisque la longitude d'un lieu par rapport à un autre est égale à la différence des heures que l'on compte au même instant dans ces deux lieux, la question se réduit à transmettre l'heure du premier au second et à noter la différence. Le moyen le plus parfait pour cette transmission est d'employer la télégraphie électrique et les câbles qui traversent aujourd'hui les continents ou les mers. Désignons par B et A ces deux lieux, L l'excès de la longitude de B sur celle de A, x le temps que l'électricité emploie pour franchir cette distance. Si à l'heure H_b du premier on envoie un signal en A, où on le reçoit à l'heure H_a, les deux heures locales H_b et $H_a - x$ répondront au même instant, et l'on aura pour différence des longitudes

$$L = H_b - (H_a - x).$$

Pour éliminer la durée x, il suffit de renverser le courant électrique et d'envoyer l'heure de A en B. Soient H'_a l'heure signalée en A, H'_b l'heure de B à l'instant où le signal H'_a lui parvient; H'_a et $H'_b - x$ seront contemporaines, et l'on aura

$$L = H'_b - x - H'_a.$$

La demi-somme de ces deux déterminations donne L indépendamment de x; leur demi-différence donne x. Ainsi la comparaison de deux pendules réglées, l'une sur le temps moyen ou sidéral de A, l'autre sur le temps moyen ou sidéral de B, donnera L à quelques centièmes de seconde près.

Culminations lunaires.

Le ciel présente des signaux instantanés visibles à la fois sur tout un hémisphère et servant, au même titre, à déterminer les longitudes. La Lune, en effet, est comme l'aiguille d'une horloge, marquant sur les méridiens célestes les heures d'un temps absolu, indépendant du mouvement diurne, le même pour tous les lieux du monde. Si donc nous voulons comparer les heures (relatives au mouvement diurne) que l'on compte au même instant absolu en deux lieux de notre globe, il suffit de prendre les heures où, en ces deux points, on aura observé la Lune par la même ascension droite.

La manière la plus exacte de déterminer l'Æ de la Lune en un lieu quelconque est d'observer l'heure sidérale H de son passage au méridien; on a alors Æ = H. Supposons donc qu'en deux lieux B et A on ait observé les heures H_b et H_a du passage de la Lune au méridien. Désignant toujours par L l'excès de la longitude de B sur celle de A, nous aurons, pour l'heure H_a, ramenée au méridien de B, $H_a - L$, et pour l'intervalle de temps absolu compté entre les deux observations,

$$H_a - (H_b - L).$$

Dans cet intervalle de temps, l'Æ de la Lune augmente (en désignant par m sa variation pour 1^s) de

$$m(H_a - H_b + L).$$

Or cette augmentation n'est autre chose que $H_a - H_b$ (¹), puisque H_b et H_a sont précisément les ascensions droites déter-

(¹) Nous supposons que B est la plus orientale des deux stations.

minées en B et A. On aura donc l'équation

$$m(H_a - H_b) + mL = H_a - H_b,$$

d'où

$$L = (H_a - H_b)\left(\frac{1-m}{m}\right).$$

Si l'on représente par ε l'erreur probable de l'observation du passage de la Lune au méridien, on aura pour l'erreur de la longitude ainsi mesurée

$$dL = \pm\varepsilon\sqrt{2}\left(\frac{1-m}{m}\right).$$

La variation moyenne de l'Æ de la Lune est, à raison de 360° ou, en temps, de 86400^s pour $27^j,3$, de $\frac{1^s}{27,3}$ par seconde. Le facteur $\frac{1-m}{m}$ est donc égal à 26,3 en moyenne; par suite,

$$dL = \pm 26,3\,\varepsilon\sqrt{2}.$$

Or ε, dans les observations du passage de la Lune au méridien, est de $0^s,1$ à peu près. Ce genre d'observation donnera donc la longitude à $3^s,7$ près, mais on obtient plus de précision en réitérant ces observations un grand nombre de fois. C'est par ce procédé que, sur la demande du Bureau des Longitudes, des officiers de notre marine ont déterminé, avec un plein succès, les longitudes d'un certain nombre de points fondamentaux pour la navigation, dans des régions fréquentées où n'aboutissent pas encore les câbles électriques. Ils ont observé en chacun d'eux un grand nombre de passages méridiens de la Lune et ont trouvé, dans les divers observatoires d'Europe et des États-Unis, les observations correspondantes dont ils avaient besoin pour obtenir les différences de longitude.

La variation de Æ, $\frac{dÆ}{dt}$, que nous avons désignée par m, n'est pas une constante; elle est donnée par la *Connaissance des Temps* d'heure en heure. Il faut la calculer, pour une date intermédiaire entre les observations extrêmes, et la multiplier par l'intervalle de temps compris entre les observations pour obtenir la différence Æ' — Æ. On tient compte par là des différences des

deux premiers ordres seulement. Quand l'intervalle est considérable, c'est-à-dire si la différence des longitudes est de plusieurs heures, il vaut mieux opérer autrement. Avec les heures approchées de Paris H_p, H'_p, on tire de la *Connaissance des Temps* les Æ correspondantes, et on a une valeur très exacte de m par $\frac{Æ' - Æ}{H_p - H'_p}$.

Lorsqu'on n'a pas d'observations correspondantes dans des stations dont la longitude soit parfaitement connue (grands observatoires par exemple), la méthode ne cesse pas d'être applicable pour cela. On réduit les observations méridiennes de la station de manière à en tirer l'Æ du centre de la Lune, puis on cherche dans les éphémérides de la Lune (*Connaissance des Temps*) l'heure moyenne de Paris correspondante, c'est-à-dire H_p. Celle du lieu, c'est-à-dire H, se déduit aisément des passages observés au méridien. On aura donc L par la différence $H - H_p$. Mais alors le résultat est vicié par l'erreur des Tables ou des éphémérides.

Détermination des longitudes terrestres par les éclipses.

L'équation des éclipses contient les coordonnées de la Lune et celles du lieu de l'observateur. Si elles sont affectées d'erreurs, on les introduira dans cette équation avec des indéterminées représentant les corrections qu'il faut leur appliquer. On écrira donc $z' + \partial z'$, $x' + \partial x'$, $y' + \partial y'$, au lieu de z', x', y', et $\xi + \partial\xi = \xi - \eta_1 \partial L$, $\eta_1 + \partial\eta_1 = \eta_1 + \xi\partial L$, au lieu de ξ et de η_1. Alors les deux phases d'une éclipse de Soleil ou d'étoile par la Lune donneront, entre ces diverses indéterminées, deux équations de condition, et si ces phénomènes ont été observés en des stations assez distantes les unes des autres pour que les coefficients d'une même inconnue dans ces équations diffèrent notablement les unes des autres, on en déduira :

1° ∂L, correction à appliquer aux longitudes de ces stations comptées à partir de l'une d'elles ;

2° $\partial z'$, $\partial x'$, $\partial y'$, d'où ∂Æ, $\partial\delta$, ∂P, c'est-à-dire les corrections des Tables de la Lune à cet instant.

LIVRE VII.

NAVIGATION.

La Science de la navigation est très complexe; nous n'en traitons ici que la partie qui a pour objet de déterminer, en mer, la position du navire et l'azimut de la route qu'il doit suivre pour arriver à un point donné. Ce beau problème a deux solutions également indispensables : l'estime et les observations astronomiques. Elles ne s'appliquent pas seulement en mer, où l'observateur n'a recours qu'aux astres ou bien à des points de repère qu'il se fait lui-même : elles servent également au voyageur qui explore des terres inconnues, et c'est sous cette seconde face que nous envisagerons ce sujet en terminant.

L'estime a pour but de mesurer directement et à tout instant la vitesse et l'orientation de la route. Elle a pour instruments le loch, la boussole et les cartes marines. A la rigueur, on fait route avec l'estime seule, et c'est même là la seule ressource du navigateur lorsque le ciel est masqué par des nuages. Les observations astronomiques ont pour but d'obtenir à certains moments la position du navire avec une précision supérieure, et de rectifier ainsi l'accumulation dangereuse des erreurs inhérentes à l'autre procédé; elles donnent à la navigation la sécurité et la célérité aujourd'hui si nécessaires. C'est la plus belle application qui ait jamais été faite des sciences aux grands intérêts des nations.

CHAPITRE XXXV.

NAVIGATION PAR ESTIME.

Mesure de la vitesse. — Loch et Ampoulette.

Le bateau de loch est une planche de bois en forme de secteur circulaire, lestée en bas par une bordure de plomb, de manière à se tenir verticalement dans l'eau. Une corde d'environ 300^m est

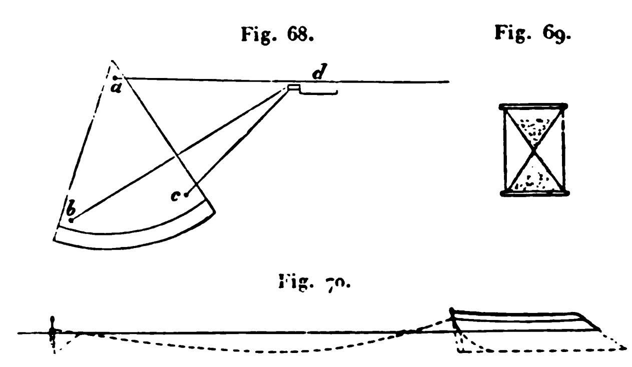


Fig. 68. Fig. 69.

Fig. 70.

attachée en *a* à cette planche et s'enroule par l'autre bout sur un tour portatif. Quand on veut mesurer la vitesse du navire (au moins une fois par heure), on jette le loch à la mer; on attend qu'il soit assez éloigné pour être à l'abri des remous de l'arrière; alors le timonier chargé de l'opération prend en main la corde, laquelle porte des nœuds espacés de $15^m,43$, et compte, pendant un laps de temps de 30^s, les nœuds qui filent entre ses doigts. Comme 30^s est la cent-vingtième partie d'une heure, comme $15^m,43$ est la cent-vingtième partie du mille marin, le nombre des nœuds donne celui des milles que le navire parcourt en une heure.

Pendant cette opération, il faut que le bateau de loch oppose la plus grande résistance possible à la traction; par conséquent la

planche doit se tenir perpendiculairement à la corde. Dans ce but, on attache la ligne de loch non seulement au sommet a, mais encore à deux points b et c de la base, au moyen de deux bouts de corde réunis par une cheville qui entre à frottement dur dans un petit cylindre de bois d. Au contraire, quand on hale à bord le bateau de loch, celui-ci doit opposer le moins possible de résistance; c'est ce qu'on obtient en imprimant à la corde de loch une forte secousse qui dégage la cheville d et la fait tomber avec les deux cordelettes bd et cd. Alors le secteur est tiré par le sommet seulement et se couche sur l'eau.

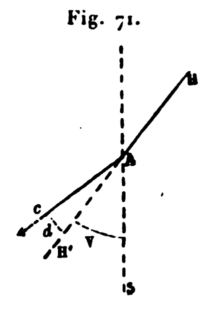
Pour compter les 30^s réglementaires, on se sert tout simplement d'un sablier qui a cette durée. Il est évident qu'une montre à secondes vaudrait beaucoup mieux. Une seconde d'erreur dans cet antique système est très admissible. C'est déjà, de ce chef, une incertitude de $\frac{1}{30}$ sur le résultat. Des expériences comparatives entre l'espace mesuré au loch, près d'un rivage, et l'espace déterminé sur le rivage par des relèvements exacts, ont engagé les navigateurs à réduire de $15^m,43$ à $14^m,8$ l'espacement réglementaire des nœuds. Il y a donc encore là quelque erreur de $\frac{0,6}{14,8} = \frac{1}{25}$ environ. Enfin le timonier exerce sans doute sur la corde du loch, sans le vouloir, une certaine traction qui raccourcit la mesure, tandis que la courbure de la corde elle-même (plus dense que l'eau de mer quand elle est imbibée) doit s'allonger un peu. D'après cela, ce moyen un peu primitif de mesurer la vitesse, capable de donner de bons résultats quand on l'applique avec soin, comporte trop souvent des erreurs d'environ $\frac{1}{20}$, surtout pendant la nuit et par les gros temps.

A raison de dix nœuds par heure, un navire parcourt en vingt-quatre heures $240'$, ce qui donne $12'$ d'erreur par jour et 1° d'erreur pour l'estime au bout de cinq à six jours de mauvais temps. Aussi a-t-on cherché à substituer au loch d'autres appareils nommés *sillomètres*. Ce sont des moulinets à ailettes de diverses formes qui sont plongés dans l'eau, à l'arrière, et prennent une rotation dont les tours s'enregistrent d'eux-mêmes par un système d'aiguilles et de cadrans, dans la chambre même du capitaine. On n'a qu'à déterminer par expérience la vitesse qui répond au nombre de tours enregistrés dans un temps donné. Malheureusement ces

appareils n'ont pas donné jusqu'ici de résultats satisfaisants; on a conservé, en conséquence, l'ancien procédé qu'il serait bien facile d'améliorer.

On n'a pas remarqué que le loch ne donne pas seulement la vitesse : il indique aussi la direction de la marche du navire, direction qui ne coïncide pas toujours avec celle de l'axe de celui-ci. Lorsqu'on marche à la voile, combinée ou non avec la vapeur, l'action du vent sur la voilure se décompose en deux parties : l'une, parallèle à l'axe du navire, qui produit un mouvement de progression en ce sens; l'autre, perpendiculaire à cet axe, qui déplace peu à peu le navire parallèlement à lui-même. La route suivie est

Fig. 71.



la résultante de ces deux déplacements; elle fait avec l'axe du navire un certain angle *d*, et se dessine sur la mer par un large sillon que l'œil suit à une assez grande distance. La boussole ne donnant que la direction de l'axe, il faut mesurer la dérive et ajouter ce petit angle à l'azimut du navire pour avoir la route réelle. Pour cela, on fixe à l'arrière un petit cercle en cuivre avec une alidade. Le diamètre zéro coïncide avec l'axe du navire, tandis que l'alidade mobile est dirigée par l'observateur sur le milieu de la houache, c'est-à-dire du sillon dont nous venons de parler. Soient AS (*fig.* 71) la direction du méridien, A*c* celle de l'axe du navire, AH' le prolongement de la houache AH, *c*AH' sera la dérive *d*, SAH' l'angle de route V, SA*c* l'azimut de l'axe ou A. On aura, si AH est à tribord comme dans la figure, $V = A - d$, et à bâbord $V = A + d$.

Évidemment l'angle de route est donné immédiatement par la ligne de loch, lorsque celle-ci est fixée au navire et que le loch est à la remorque. Il suffit pour cela de faire une modification très simple à son gréement. Supposons qu'on ait noué à la corde de loch un des deux brins *b* ou *c* (*fig.* 68) et que la chevillette soit

exclusivement fixée à l'autre. Lorsque, après avoir mesuré la vitesse à la manière ordinaire, on imprime une secousse à la corde pour dégager la cheville, le loch, traîné par la tranche, continuera à se tenir debout et se placera dans la direction de la moindre résistance, c'est-à-dire dans le sens de la marche. On le maintiendra ainsi à une distance de 300^m et l'on relèvera sa direction, soit au compas, soit au sextant, ce qui vaut mieux, en rendant visible son sommet au moyen d'une tige légère portant une carte blanche, comme un jalon. Si l'on emploie le sextant, on mesurera la distance angulaire du sommet du loch à un astre connu. On obtiendra ainsi l'angle de route, dérive y comprise. Rien n'empêcherait d'opérer la nuit; on rendrait visible le haut du loch en y attachant une très petite lanterne, sauf à le mettre avec précaution à la mer au lieu de l'y jeter.

Le même procédé fournirait, à la surface de la mer, une direction connue qui remplacera assez bien la ligne d'horizon si souvent masquée par les brumes. La hauteur du signal placé au sommet du loch au-dessus de la mer étant h, et H celle de l'œil de l'observateur, l'inclinaison de cette ligne aura pour tangente $\frac{H-h}{300}$; elle sera donc sensiblement de $3438' \frac{H-h}{300}$. Sans doute l'agitation de la mer fait varier à la fois H et h, mais, en temps calme, l'oscillation de la houle ne dépasse guère 1^m, et ne produit qu'une variation de $11'$ dans la direction de cette ligne de visée. Cet effet sera même considérablement réduit si l'on s'attache à observer la position moyenne du point de mire éloigné.

Nous avons montré ailleurs qu'on peut tirer un autre parti du bateau de loch en lui adjoignant une boussole qui, placée loin de l'influence du fer du navire, donnera la direction de l'aiguille aimantée et l'azimut magnétique vrai de la route suivie.

Boussole.

S'il n'y a pas de fer à bord, la boussole obéit à la seule action directrice du globe. L'aiguille aimantée est placée dans une boîte cylindrique lestée, suspendue à la Cardan et fixée à l'arrière sous l'œil du timonier. Au moyen d'une chape en pierre dure, elle

repose sur un pivot très aigu autour duquel elle tourne librement. Elle-même porte deux pièces : d'abord un disque mince en mica sur lequel est tracée la rose des vents ; ensuite un petit contre-poids destiné à la faire tenir horizontalement. C'est un système semblable à la boussole de l'arpenteur ; seulement c'est ici l'aiguille et non la boîte qui porte le limbe divisé, et l'alidade est remplacée par une ligne de foi tracée très visiblement sur les parois de la boîte, dans la direction de l'axe du navire. Comme cette boîte et la ligne de foi font corps avec le navire, tandis que l'aiguille et son cercle divisé sont entièrement libres, si le navire vient à tourner horizontalement d'un certain angle, la ligne de foi tournera de cet angle, tandis que l'aiguille et la rose des vents resteront immobiles dans la direction que leur assigne la force directrice du globe. La ligne de foi viendra se placer devant une certaine division de la rose des vents et fera connaître ainsi l'azimut du navire, compté à partir du méridien magnétique, si l'aiguille se tient réellement dans ce plan-là.

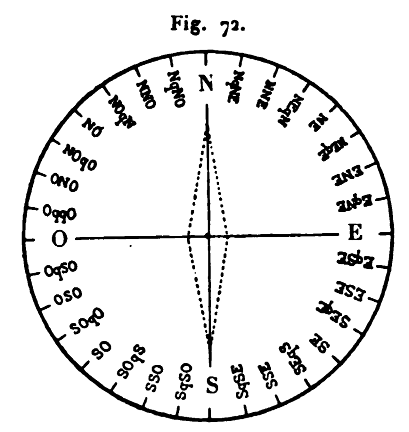
Conformément à une vieille tradition, les azimuts se comptent sur la boussole en deux sens opposés à partir de quatre divisions cardinales S, O, N, E. Les azimuts sont désignés, non par des nombres, mais par des noms propres, tels que nord-nord-est, nord-quart-nord-ouest, etc. C'est ainsi que jusqu'à la fin du siècle dernier les astronomes comptaient les longitudes écliptiques à partir de douze origines distinctes, portant chacune un nom propre et comprenant entre elles un signe ou 30°. Cet antique système était bon autrefois, lorsqu'on ne tenait compte que de quatre directions ; il s'est appliqué sans trop d'efforts à huit, mais il est devenu intolérable lorsqu'on a été obligé de recourir à seize et surtout à trente-deux directions. Les trente-deux divisions actuelles de la circonférence portent le nom de *rumbs* et valent 11° 15′. Le rumb à son tour se subdivise en huitièmes, valant 1° 24′ 22″.

Voici la figure actuelle de la rose des vents (*fig.* 72).

On intercale ces huitièmes, par exemple entre SOqS et SO. en disant : SOqS$\frac{1}{8}$, SOqS$\frac{1}{4}$, SOqS$\frac{3}{8}$, la numération procédant alors du sud, soit vers l'ouest, soit vers l'est. Dans la région opposée, elle procédera du nord pour les huitièmes de quart. Lorsqu'on fait un calcul d'azimut astronomique par nos formules, cet angle est obtenu en degrés comptés dans un sens unique (de gauche à droite).

à partir d'une origine unique (le sud). Grâce à ces simples conventions, il n'y a jamais d'embarras, d'ambiguïté ni de trouble pour le calculateur. Mais, lorsqu'on donne cet angle de route au timo-

Fig. 72.



nier chargé de maintenir le cap du navire dans la direction correspondante, il faut opérer une véritable conversion, à l'aide d'une

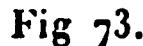


Fig 73.

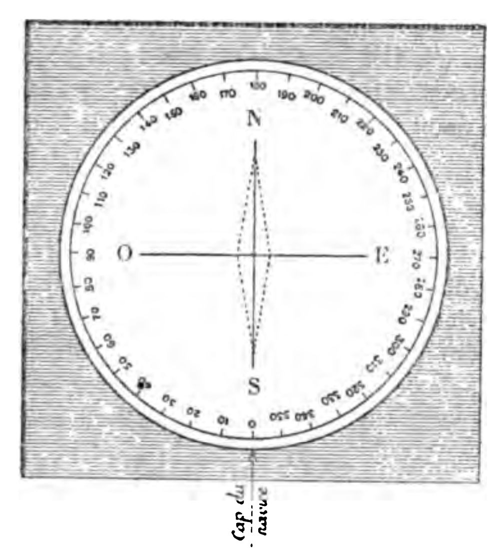


table spéciale, pour traduire cet angle dans une langue baroque, sous prétexte que le timonier n'est pas capable d'en comprendre d'autre. Il serait bien plus simple de graduer la rose des vents,

comme on le fait pour tous les instruments divisés, que tout le monde, à terre, comprend et lit sans difficulté. Voici quelle en serait la disposition (*fig.* 73). Les divisions, il est vrai, sont de 10°, mais on en appréciera très bien les dixièmes par un exercice de quelques jours. Le timonier trouvera plus facilement sur cette rose la direction de 302°, par exemple, que sur la rose actuelle la direction correspondante dont voici le calcul :

	360°
Azimut..............................	302
Angle compté du sud vers l'est........	58
Sud-est	45
	13
q Est..............................	11.15′
A peu près $\frac{1}{8}$........................	1.45

ce qui donne au compas la direction SEqE$\frac{1}{8}$.

L'aiguille aimantée dévie ordinairement du méridien astronomique d'un angle δ qu'on nomme la *déclinaison*. En outre, l'influence des fers du navire produit une autre déviation D, non plus générale comme la première, mais toute spéciale à la direction actuelle du navire ([1]). Ces deux angles étant pris positivement dans le sens où croissent les azimuts, on aura, entre l'azimut astronomique A et l'azimut apparent M qu'on lit sur la boussole, la relation

$$A = M + D + \delta.$$

Les marins ont des cartes qui donnent la déclinaison pour quelques lieux du globe. Ils ont des procédés particuliers pour déterminer la déviation D relative à un cap donné M ([1]). A ces conditions les indications du compas serviront à maintenir le cap du navire dans l'angle de route voulu. Nous verrons, en outre, que les observations astronomiques permettent de déterminer fréquemment cette correction $D + \delta$, qu'on nomme la *variation*.

La navigation par estime consiste donc à maintenir, à l'aide du gouvernail et de la boussole placée sous les yeux du timonier, le navire dans un azimut donné, en sorte que sa route coupe sous

([1]) Voyez pour l'étude de la déviation mon *Astronomie nautique*.

cet angle-là tous les méridiens qu'il traverse successivement; il faut en outre mesurer d'heure en heure sa vitesse à l'aide du loch.

Loxodromie et problèmes de route.

Courbe tracée sur une sphère et coupant tous les méridiens sous un angle constant que nous désignerons désormais par V.

Toute courbe sphérique passant par le point λ, L, et coupant le méridien de ce point sous un angle V, a pour équations différentielles

$$(1) \qquad ds \cos V = d\lambda,$$

$$(2) \qquad ds \sin V = -dL \sin\lambda,$$

l'angle V étant compté, comme les azimuts, de la partie sud du méridien vers l'ouest, et les longitudes vers l'est.

Lorsqu'il s'agit d'une loxodromie, l'angle V est constant pour toute la courbe; dès lors on a, en intégrant l'équation (1) de λ à λ',

$$(3) \qquad s \cos V = \lambda' - \lambda.$$

Entre (1) et (2), éliminons ds, ce qui donne

$$(4) \qquad dL = -\operatorname{tang} V \frac{d\lambda}{\sin\lambda},$$

d'où, en intégrant [1],

$$(5) \qquad L' - L = -\operatorname{tang} V \left(\mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda' - \mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda\right),$$

Pour exprimer en minutes de cercle le deuxième membre et se

---

[1] Quand s est le chemin parcouru pendant quelques heures ou même une journée, on peut intégrer plus simplement cette équation en calculant $\sin\lambda$ pour la région intermédiaire, c'est-à-dire entre les limites λ et λ', et en considérant $\sin\frac{\lambda'+\lambda}{2}$ comme constant. Il vient alors

$$(L' - L) \sin \frac{\lambda' + \lambda}{2} = -s \sin V.$$

C'est la formule dont se servent les marins pour calculer le chemin de chaque jour en longitude.

servir de logarithmes ordinaires, il faut le multiplier par $\frac{3438}{\log e} = 7915',7$, facteur dont le logarithme est $3,89849$.

On nomme chemin en colatitude la quantité $\lambda' - \lambda = s \cos V$, et chemin en longitude la quantité

$$L' - L = -\operatorname{tang} V(\mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda' - \mathcal{L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda).$$

On simplifiera le calcul de la deuxième formule en se servant de la Table des *latitudes croissantes* dont nous avons donné un extrait à la page 354 du Tome I, sous la forme $7915',7 \log \cot \frac{\lambda}{2}$.

Les problèmes de route sont : 1° déterminer l'angle de route qu'il faut suivre pour aller de A en B, les coordonnées de ces points étant connues; 2° connaissant s et V, c'est-à-dire la longueur loxodromique s parcourue à partir du point A sous l'angle V, déterminer les coordonnées λ', L' du point d'arrivée.

Voici, comme exemple, le calcul de s et V pour la route de Brest à New-York :

Coordonnées de Brest.	Coordonnées de New-York.
$\lambda = 40°37'$	$\lambda' = 49°7'$
$L = 353°10'$	$L' = 283°4'$

$\lambda' - \lambda = 8°40' = 520'$, $\qquad L' - L = -69°30' = -4170'$.

log tang $\frac{1}{2}\lambda'$..	9,66171	log diff........	8,96951
log tang $\frac{1}{2}\lambda$..	9,56849	log const......	3,89849
Diff..........	0,09322		2,86800
		log$(L' - L)$...	3,62014
		log tang V.....	0,75214

La différence $\lambda' - \lambda$ ayant le signe +, il en est de même de cos V. Par conséquent

V........................	79°58'
log cos V....................	9,24110
log $(\lambda' - \lambda)$..................	2,71600
log s......................	3,47490
s........................	2985'

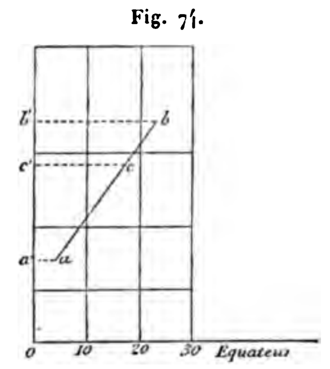
Ainsi, pour aller de Brest à New-York, il faut suivre l'azimut

loxodromique de 80°. On donnera donc l'ordre au timonier de mettre le cap sur l'OqSO, 1°O de la rose des vents. L'arc de loxodromie à parcourir sera de 2985 milles et, à raison de 13 nœuds par heure, le paquebot fera cette traversée en 9 jours et demi.

Usage des cartes marines.

Ces problèmes se résolvent aussi graphiquement à l'aide des cartes marines dont nous avons donné la théorie dans le Tome I. On sait que les angles sont conservés sur ces cartes, et que les arcs de loxodromie y sont figurés par des droites. On aura donc immédiatement la route de Brest à New-York en tirant une droite d'un de ces points à l'autre, et en mesurant au rapporteur l'angle V sous lequel cette droite coupe le méridien. Quant à la vraie longueur s de l'arc de loxodromie représenté sur la carte par la longueur dilatée ab (*fig.* 74), elle sera donnée par la construction suivante.

Fig. 74.



Considérez qu'une portion $a'b'$ de méridien, comprise entre les parallèles λ et λ', est elle-même une loxodromie dilatée dans la même proportion que toute autre loxodromie ab tracée entre les mêmes parallèles; seulement, pour cette loxodromie particulière, la carte donne immédiatement le rapport de dilatation.

En effet, λ' se lit sur la graduation du méridien central, ainsi que λ; on a donc par $\lambda' - \lambda$ la vraie valeur de l'arc $a'b'$ en parties de la circonférence. Prenez sur la graduation de l'équateur une longueur égale à l'arc $\lambda' - \lambda$ ainsi obtenu, et portez-la de a' en c'

sur le méridien du point a'; puis, par le point c', menez cc' parallèle à bb'; ac sera la vraie grandeur de l'arc de loxodromie représenté en ab. Vous l'évaluerez en degrés et minutes en portant avec un compas la longueur ac sur la graduation de l'équateur.

Le problème inverse, étant donné sur la carte le point de départ a, l'angle de route V et l'arc de loxodromie s que le navire vient de parcourir, déterminer le point d'arrivée b, se résout d'une manière analogue. On prendra sur l'équateur un arc comprenant le nombre de milles ou de minutes contenu dans s, et on le portera en ac sur une droite indéfinie tirée du point a sous l'azimut V. En la projetant en $a'c'$ sur le méridien central (qui porte les divisions), on aura $a'c' = s \cos V = \lambda' - \lambda$. Évaluez $a'c'$ en degrés et minutes en le portant sur l'équateur; si vous retranchez ce nombre de degrés de λ' vous aurez λ. Or, sur la carte marine, le parallèle de colatitude λ se trouve marqué en b'; il suffira donc de mener $b'b$ parallèle à $c'c$ pour obtenir en ab la représentation de s sur la carte et par suite pour y marquer le point d'arrivée b.

On a chaque jour des constructions de ce genre à faire sur la carte pour y marquer le point d'arrivée, lequel devra servir de point de départ de la route à suivre ultérieurement. On comprend, en effet, qu'il n'est pas toujours possible, à cause du vent, de la dérive, etc., de suivre exactement la route prescrite. Il faut donc chaque jour faire le point, c'est-à-dire déterminer graphiquement sur la carte la position du navire à une heure donnée.

Ces opérations commencent dès que le pilote a conduit le navire en pleine mer en se guidant sur des bouées, des balises, des phares, des repères familiers. La terre étant encore en vue, le commandant, qui a repris la conduite de son navire, fait relever des points connus sur la côte à l'aide d'une boussole employée comme théodolite (compas de relèvement). Soient A et B deux de ces points observés du navire C, par les azimuts V et V'. Les azimuts du navire, vu de ces points, seront respectivement V + 180°, V' + 180°. On trace deux droites sur la carte sous ces azimuts-là : leur intersection en C donnera sur la carte la position du navire. Tel sera le point de départ des opérations subséquentes.

On peut ainsi conduire par estime un navire jusqu'à l'atterrissage. Toutefois les erreurs des évaluations des s et des V s'accumulent et finissent par atteindre un total fort dangereux. Si le

ciel reste couvert, si le navigateur forcé de renoncer aux observations astronomiques n'a, vers la fin de son voyage, que le résultat de l'estime journalière, il est tenu à beaucoup de prudence. Bien avant le terme qu'il serait porté par l'estime à assigner à son voyage, il fera faire de temps en temps des opérations de sondage ([1]) et enverra des vigies dans les mâts pour signaler la terre. Lorsque la terre sera en vue, il se trouvera peut-être bien loin du port. A l'aide de vues panoramiques des côtes, il tâchera de reconnaître les signaux naturels qu'elles peuvent présenter, de manière à déterminer la vraie position de son navire et se mettre en état d'atterrir.

Dans les conditions ordinaires, on ne peut guère gouverner qu'à 2° ou 3° près, et déterminer la vitesse linéaire qu'à $\frac{1}{20}$. Au bout d'une dizaine de jours de navigation à 12 nœuds par heure, on ne saura guère, par l'estime seule, autre chose que ceci : le navire doit se trouver quelque part dans un cercle de 4° de rayon ayant pour centre le point marqué sur la carte comme étant la dernière position estimée.

([1]) Les cartes à grand point que tout navire emporte pour les régions qu'il doit visiter donnent l'hydrographie des côtes, c'est-à-dire les profondeurs de la mer à plusieurs distances du rivage.

CHAPITRE XXXVI.

INSTRUMENTS DE LA NAVIGATION ASTRONOMIQUE.

Elle a pour but de déterminer chaque jour la position exacte du navire à l'aide d'observations célestes, de manière à rectifier l'estime et à éviter l'accumulation de ses erreurs. On navigue alors à quelques minutes et non plus à quelques degrés près. Les instruments qu'elle emploie sont le sextant, le chronomètre et la *Connaissance des Temps* publiée d'avance, chaque année, par le Bureau des Longitudes. Les inconnues à déterminer par l'observation sont λ et $L = H - H_p$, c'est-à-dire la colatitude, l'heure du lieu et celle de Paris au même instant. L'estime ne sert plus qu'à fournir chaque jour des valeurs approchées des inconnues λ et L, ou plutôt le chemin fait à partir de la dernière détermination astronomique. Nous aurons, par rapport à l'heure de Paris H_p, à exposer deux méthodes : 1° celle des chronomètres ou montres marines qu'on règle sur l'heure de Paris avant le départ, et qu'on suppose devoir marquer ensuite cette heure pendant tout le voyage; 2° la méthode plus sûre des distances lunaires dans laquelle les positions observées de la Lune, comparées avec les positions calculées pour l'heure de Paris dans la *Connaissance des Temps*, donnent toujours H_p avec certitude.

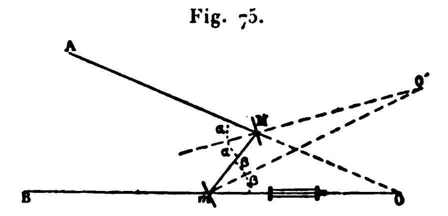
Le sextant.

Lorsqu'un rayon de lumière tombe sur un miroir, il est réfléchi en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Si l'on fait tourner le miroir d'un certain angle, le rayon réfléchi change de direction et tourne d'un angle double. On s'est servi de cette propriété pour construire des instruments destinés à mesurer les

angles entre deux objets, l'un vu directement par la lunette, l'autre vu par la même lunette, mais par réflexion sur un miroir placé sur le trajet des premiers rayons et ne couvrant que la moitié de l'objectif. Ces instruments étaient inapplicables en mer, car le moindre mouvement du navire, en déplaçant le miroir, faisait dévier d'un angle double les rayons réfléchis, et empêchait ainsi la superposition des images des deux objets. Mais, si au lieu d'une seule réflexion on en emploie deux, les choses changent complètement; la direction d'un rayon doublement réfléchi devient indépendante de la position des deux miroirs; pourvu que l'angle de ceux-ci ne change pas, on peut faire tourner leur ensemble sans que le rayon émergent, après deux réflexions, change le moins du monde de direction. Un instrument fondé sur ce principe aura donc l'avantage de n'avoir pas besoin d'une installation fixe.

Dans la *fig.* 75, où il s'agit de la mesure de l'angle AOB, le rayon AO est doublement réfléchi par les deux miroirs M, m et se trouve ainsi amené dans la direction mO. Menons les normales

Fig. 75.



MO′ et mO′ aux deux miroirs; la première sera la bissectrice de l'angle AMm, la seconde celle de l'angle MmO. Le triangle MmO′ donne

$$\alpha = O' + \beta;$$

le triangle MmO donne

$$2\alpha = O + 2\beta;$$

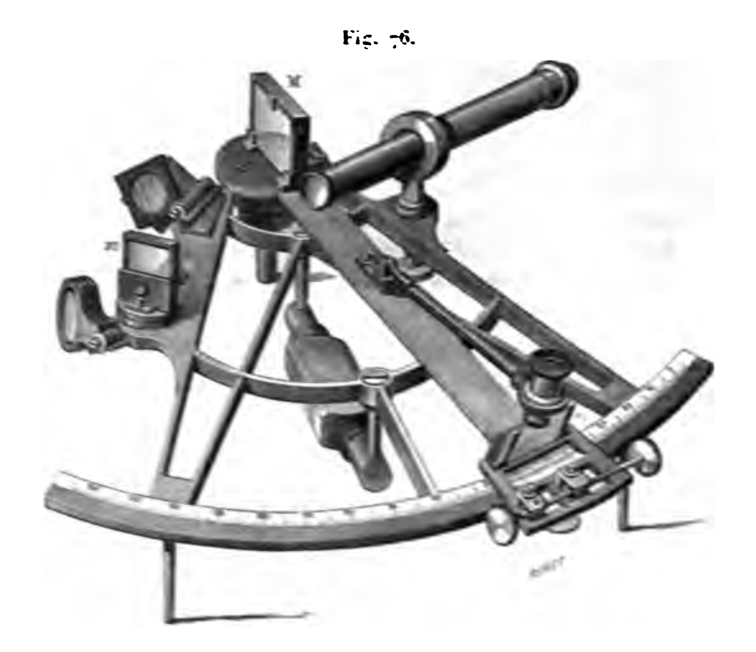
donc $O = 2O'$. Si l'angle O′ des deux miroirs reste constant, de quelque manière qu'on présente leur système au rayon AO, la direction du rayon émergent, après deux réflexions, sera BO ou une parallèle à cette droite.

Pour construire sur ce principe un instrument de mesure angulaire, il suffit de placer une lunette sur le trajet OmB, de manière

à viser directement l'objet B, vu par-dessus le miroir *m* [1] et à l'aide d'une partie de l'objectif, puis de faire varier l'angle des deux miroirs de manière à amener, par deux réflexions, les rayons venus de l'objet A dans la direction B*m*O. L'image de cet objet sera vue dans la lunette par l'autre moitié de l'objectif. Lorsque les deux images se trouveront en coïncidence, l'angle des deux directions AO et BO sera égal au double de l'angle des deux miroirs.

Cela posé, montons les deux miroirs et la lunette sur un châssis portant un arc de cercle divisé et, au centre de ce cercle, un pivot autour duquel le miroir M puisse tourner, entraînant avec lui une alidade à vernier, tandis que le petit miroir reste invariablement fixé au châssis : on aura le sextant, inventé d'abord par Newton, puis par Godfrey, de Pennsylvanie, et enfin par Hadley.

Fig. 76.



L'angle actuel des deux miroirs est donné par la lecture de la division qui répond à la direction de l'alidade : il se lit sur le

[1] Ou par une moitié non étamée de ce miroir.

limbe divisé; en le doublant, on a l'angle des deux directions AO et BO.

Cet admirable instrument est applicable à la mer; car, si le roulis ou le tangage déplace les images des deux astres dans la lunette que l'observateur tient, il ne les séparera pas lorsqu'elles auront été amenées à la coïncidence; elles ne feront que se mouvoir ensemble dans le champ de la vision.

L'origine de la graduation du limbe devrait être le point où se place l'alidade quand les deux miroirs sont parallèles. Pour déterminer ce point, on dirige l'instrument sur un objet très éloigné, le Soleil par exemple. On en voit deux images, l'une directe, l'autre par double réflexion. On amène la seconde à coïncider avec la première : la division υ où s'arrête alors le zéro de l'alidade est l'origine des angles formés par les deux miroirs. Il faut donc retrancher υ de toute lecture du limbe correspondant à un angle mesuré. Le mieux, quand on opère sur le Soleil, est de mettre les deux images en contact par leurs bords voisins, puis par leurs bords opposés, et de prendre la moyenne des indications du vernier. Comme vérification, la demi-différence des deux lectures doit donner le diamètre angulaire du Soleil.

Pour éviter de doubler les lectures du limbe, on divise celui-ci en demi-degrés et on les numérote comme des degrés entiers.

Rectification du sextant.

Pour que le théorème d'Optique mentionné plus haut se trouve réalisé, il faut que la double réflexion s'opère dans un plan perpendiculaire aux deux miroirs. De là cette triple condition : chaque miroir doit être perpendiculaire au plan de l'instrument; l'axe optique de la lunette doit être parallèle à ce plan.

1° *Perpendicularité du grand miroir.* — En regardant par réflexion dans le grand miroir le limbe de l'instrument, l'œil étant placé très près du plan de ce limbe, on verra en même temps une portion de ce limbe directement, et cette même partie par réflexion. Si la partie réfléchie n'est pas sur le prolongement de la première, il y a un défaut de perpendicularité que l'on corrige à l'aide des vis propres du grand miroir.

Ce procédé, fort rapide, n'est pas rigoureux, parce que l'œil doit se placer au-dessus du plan du limbe et ne le voit pas ainsi, par réflexion, dans un plan exactement perpendiculaire au grand miroir. Il faut donc élever le plan du limbe à la hauteur de l'œil. On y parvient à l'aide de petites équerres égales nommées *viseurs*, qu'on place sur le limbe de part et d'autre de l'alidade, et d'un troisième viseur qui détermine la position de l'œil. L'opération se fait d'ailleurs comme précédemment; il faut que l'arête supérieure du viseur réfléchi soit sur le prolongement de l'arête de celui qu'on voit directement.

2° *Perpendicularité du petit miroir.* — Si celui-ci n'est pas perpendiculaire au plan du limbe, on ne pourra pas amener le grand miroir, bien rectifié, au parallélisme avec le premier. Quand on pointera la lunette sur le Soleil, il n'y aura pas moyen d'en faire coïncider les deux images. Il faudra toucher aux vis de rappel du petit miroir en même temps qu'à celle de l'alidade, de manière à obtenir cette coïncidence.

3° Les angles doivent être mesurés dans un plan perpendiculaire aux miroirs et par suite parallèle au plan du limbe; il faut donc rendre l'axe optique de la lunette parallèle à ce plan. L'instrument étant fixé horizontalement sur une table, on visera, le long du plan du limbe, l'arête rectiligne d'un mur éloigné, et l'on regardera ensuite par la lunette pour voir si cette arête se trouve entre les deux fils du réticule placé au foyer de l'objectif de la lunette. Dans le cas contraire, on déplacera cette plaque à l'aide d'une vis spéciale jusqu'à ce que cette arête soit au milieu des fils.

Au fond, l'axe optique ne joue pas ici le même rôle que dans les autres instruments de mesure. La croisée des fils des lunettes ordinaires est remplacée, dans celle du sextant, par deux fils parallèles, assez écartés, entre lesquels doivent être maintenues les images; mais celles-ci peuvent occuper toutes les positions dans la bande limitée par ces fils.

Nous ne parlerons pas du prismatisme des miroirs. Il est facile de s'assurer que les miroirs ont leurs faces parallèles en y regardant, avec une lunette, un astre par réflexion. Si le miroir est prismatique, on verra deux images, et alors il faudra refuser le miroir. De même, les verres obscurcissants qu'on interpose sur le trajet des rayons du Soleil pour affaiblir son éclat et le rendre comparable à

celui de la Lune dans la mesure des distances lunaires, ou à celui de l'horizon de la mer quand on mesure une hauteur, doivent être rebutés si leurs faces ne sont pas parallèles.

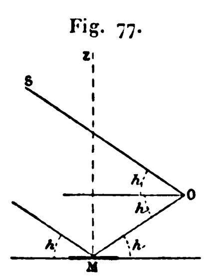
Mesure des hauteurs angulaires.

Le sextant sert à mesurer la distance angulaire de deux points quelconques; mais son application principale en mer est la mesure des hauteurs comptées à partir de la ligne d'horizon. L'observateur, tenant le limbe de l'instrument dans le vertical de l'astre, pointe la lunette sur la ligne d'horizon; puis, en faisant tourner l'alidade, et par conséquent le grand miroir, il amène l'image deux fois réfléchie de l'astre dans le champ de la lunette. S'il s'agit du Soleil ou de la Lune, il établit le contact du bord supérieur ou du bord inférieur avec la ligne d'horizon. La division du limbe à laquelle s'arrête le zéro de l'alidade donne, sauf correction pour le point de parallélisme des miroirs, la hauteur angulaire du bord observé au-dessus de l'horizon de la mer. Pour avoir la hauteur vraie, comptée à partir du plan horizontal de l'observateur, il faut retrancher la dépression, élément réduit en Tables qu'on trouvera plus loin. Le complément de cette hauteur vraie est la distance zénithale.

Hauteurs observées à terre.

La mesure des hauteurs angulaires, à terre, exige l'emploi d'un horizon artificiel sur lequel on observe le Soleil par réflexion avec la lunette, tandis qu'on amène l'image directe dans le champ par

Fig. 77.



double réflexion. On obtient ainsi le double de la hauteur de l'astre observé, ainsi qu'on le voit en jetant un coup d'œil sur la *fig.* 77.

Le miroir est, d'ordinaire, un plan de verre noir qu'on place sur un support et qu'on rend bien horizontal à l'aide d'un niveau. Il vaut mieux recourir à un bain de mercure. On emploie pour cela une simple cuvette sphérique très peu courbe, en cuivre argenté, dans laquelle on verse le mercure. Ce liquide mouille les parois de cette sorte de vase, et, si on lui donne tout juste la profondeur nécessaire pour éviter les effets de la capillarité, sa surface sera peu sensible aux petits mouvements de l'air. Lorsqu'on est forcé de le recouvrir d'une glace, il faut faire deux observations de hauteur en donnant à la glace deux positions symétriques, c'est-à-dire en la tournant dans son plan de 180°, pour que la moyenne des deux hauteurs soit indépendante du défaut de parallélisme des faces de ladite glace.

Degré de précision d'une mesure au sextant.

Supposons un sextant bien divisé et exempt d'erreur d'excentricité, des miroirs bien plans, à faces bien parallèles, des verres obscurcissants irréprochables. 1° Il faudra le rectifier par une série d'opérations qui laisseront quelques défauts. De là une première source d'erreurs très petites dont les mesures seront affectées plus ou moins, suivant les cas. 2° Il faudra déterminer le point de parallélisme des miroirs, point qui sert d'origine aux divisions du limbe. Cette opération comporte une nouvelle erreur fort petite, mais non nulle en général. Il y aura encore : 3° l'erreur de pointé ; 4° l'erreur due à l'inclinaison dont nous venons de parler ; 5° l'erreur de lecture du vernier, qui donne les 10", mais sur lequel on apprécie fort bien les 5" ; 6° l'erreur de la dépression. Admettons, pour fixer les idées, que toutes ces erreurs soient de 5" et qu'elles aient bien le caractère d'erreurs accidentelles. Alors l'erreur probable d'une mesure de hauteur au sextant, avec un bon instrument et dans des circonstances favorables, sera $\pm\sqrt{5^2 \times 6} = \pm 12''.4$ ou $\pm 0'.2$.

Si les erreurs systématiques sont réellement négligeables, les observations n'étant plus exposées qu'à des erreurs accidentelles de pointé et de lecture, on parvient à réduire notablement l'erreur susdite en recommençant la même mesure m fois de suite, avec le même soin, et en prenant la moyenne des résultats. L'erreur pro-

bable de cette moyenne sera $\pm \frac{0',2}{\sqrt{m}}$. Avec quatre mesures seulement, on réduirait l'erreur à 0',1 [1].

A terre, on obtient naturellement plus d'exactitude; en outre, comme on mesure le double de la hauteur, l'erreur probable de la hauteur simple sera réduite de moitié. L'erreur probable d'une mesure double étant de $7''$ à $8''$, on parvient à réduire cette erreur à $2''$ ou $3''$ par un nombre modéré d'observations.

Il faut pourtant reconnaître au sextant un vice réel; c'est que son limbe ne s'étend pas à une circonférence entière. Il n'est pas possible d'éliminer l'erreur d'excentricité et une partie des erreurs de division par l'emploi de deux verniers opposés (t. I, p. 82). Les dilatations doivent en altérer plus ou moins la figure. Le cercle à réflexion de Borda lui est donc bien supérieur quand il s'agit de mesures délicates. On préfère néanmoins le sextant, parce que la manœuvre en est plus simple; il est moins lourd et coûte moins cher.

Dépression de l'horizon de la mer.

Nous avons vu (t. I, p. 325) que la dépression géométrique a pour valeur approchée

$$d = 206\,265'' \sqrt{\frac{2h}{r}},$$

en nommant h l'altitude de l'œil au-dessus du niveau de la mer et r le rayon de la Terre. La réfraction géodésique élève un peu cette ligne d'horizon. Pour en tenir compte, il faut multiplier l'expression précédente par $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$, m étant égal à 8,2.

On obtient ainsi le tableau suivant, où l'on peut prendre, à vue, la dépression qui convient à la hauteur de l'œil de l'observateur.

---

[1] Pour peu que la mer soit agitée et l'horizon mal terminé, cette erreur probable devient beaucoup plus grande. La distance angulaire de deux astres s'obtient, dans tous les cas, avec plus d'exactitude que les hauteurs : le pointé est bien plus précis, parce que la ligne d'horizon n'intervient plus.

Hauteur de l'œil.	Dépression géométrique.	Dépression réelle.
m	′ ″	′ ″
1.......	1.56	1.48
2.......	2.44	2.33
3.......	3.20	3. 8
4.......	3.51	3.37
5.......	4.19	4. 2
6.......	4.43	4.25
7.......	5. 6	4.47
8.......	5.27	5. 6
9.......	5.47	5.25
10.......	6. 6	5.43
20.......	8.37	8. 4
30.......	10.33	9.53
40.......	12.11	11.25
50.......	13.38	12.46
100.......	19.16	18. 3

Chronomètres.

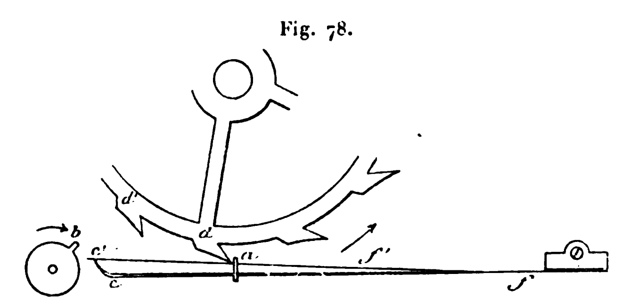
Les chronomètres ont même rouage que les montres ordinaires; ils n'en diffèrent que par les dimensions et l'échappement. Les dimensions sont beaucoup plus grandes; destinés à être toujours maintenus à plat, leur boîte en cuivre cylindrique est lestée de plomb et reliée à une boîte extérieure carrée, en acajou, par une suspension à la Cardan, comme celle des boussoles. Elles échappent ainsi aux grands mouvements du roulis ou du tangage, et par suite aux inégalités de marche que les horlogers connaissent sous le nom de *variation du plat au pendu*. Au lieu de l'échappement à cylindre des montres vulgaires ou de l'échappement à ancre des bonnes montres, ils ont un système qui laisse presque constamment libre l'oscillation du régulateur. Celui-ci se compose d'un balancier et d'un ressort, comme dans les montres; mais le balancier est compensé par les variations de température, et le ressort réglant est, non un spiral plat, mais un ressort en forme d'hélice. Quant à la force motrice, c'est toujours un ressort spiral enfermé dans un barillet; celui-ci communique avec le rouage par l'intermédiaire d'une chaîne d'acier et d'une fusée destinée à compenser la variation continuelle de force d'un ressort qui se détend.

Échappement libre à ressort.

En supposant que les oscillations du balancier autour de son axe soient bien isochrones lorsqu'il est libre, l'échappement doit être conçu de manière que le balancier, passant par sa position d'équilibre avec son maximum de vitesse, dégage une dent de la roue d'échappement, en levant un petit arrêt qui reviendra de lui-même à sa place. La roue d'échappement devenue libre tournera, sous l'action du moteur transmise par le rouage, de l'angle compris entre deux dents, et, la dent suivante rencontrant le petit arrêt, le rouage s'arrêtera de nouveau.

La *fig.* 78 représente le moment où la dent *d*, qui bute contre

Fig. 78.



l'arrêt *a*, va être dégagée par l'action du régulateur, dont l'oscillation s'accomplit actuellement dans le sens de la flèche. L'arrêt *a* est une petite pierre fine enchâssée dans un long ressort *cf*. Ce ressort est poussé vers le bas par un doigt *b* fixé à l'arbre du balancier; il entraîne l'arrêt *a* et dégage ainsi la dent *d* de la roue d'échappement, qui commence à tourner. Mais, lorsque le doigt *b* s'est éloigné, le ressort revient aussitôt en place et l'arrêt *a* est choqué par la dent suivante *d'*, qui se trouve arrêtée à son tour.

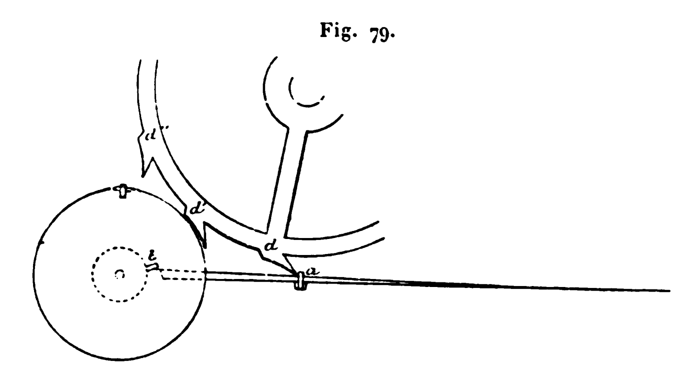
Il ne faut pas que, dans la seconde période de l'oscillation (de sens contraire à la flèche), le doigt *b* du balancier rencontre la résistance du ressort *cf* buté en *a*. Pour cela, on recourbe celui-ci vers son extrémité *c* et on le recouvre d'un ressort beaucoup plus faible *c'f'*, qui dépasse un peu le premier. Quand *b* vient dans le sens de la flèche, il agit sur ce petit ressort, qui appuie sur le grand et l'entraîne; quand *b* agit dans le sens inverse, il ne rencontre

que la très faible résistance du petit ressort $c'f'$; il le soulève sans déranger l'arrêt.

Ainsi une dent de la roue d'échappement passe à chaque oscillation complète du balancier, et presque aussitôt la dent suivante vient buter, avec un petit bruit sec, contre l'arrêt *a*.

L'échappement doit remplir une seconde fonction, celle de restituer au balancier la force vive qu'il perd à chaque instant par les diverses résistances qu'il éprouve, de manière à entretenir son mouvement oscillatoire. Pour cela, on fixe, sur un disque porté par l'axe du balancier (*fig.* 79) dans le plan même de la roue d'échappement, un petit taquet *e* en pierre dure destiné à recevoir le choc de la troisième dent d'' au moment où, la dent *d* étant dégagée, la roue d'échappement se met à tourner.

Fig. 79.



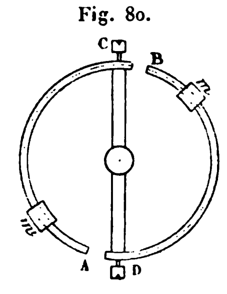
Lorsque *b*, qui commence à agir sur la détente, aura tourné du petit angle nécessaire pour rendre libre la dent *d*, le petit taquet *e* aura dépassé la dent d' et recevra un choc de cette dent au moment où, la roue d'échappement étant devenue libre, la dent d' se trouvera animée d'une vitesse linéaire plus grande que celle de *e*. A tout autre moment, la roue d'échappement étant fixée dans la position même de la figure, le taquet *e*, dont l'extrémité décrit une circonférence qui mord sur celle de l'extrémité des dents, passera librement entre les dents placées en d' et d''.

On voit que, si le chronomètre vient à s'arrêter, dans le cas, par exemple, où l'on aurait oublié de le remonter, il ne se remettra pas de lui-même en marche, comme les montres ordinaires, après avoir été remonté. Il faut, pour mettre le balancier en mouvement,

obtenir un premier départ de l'arrêt *a*. Pour cela, on prend la boîte du chronomètre entre les mains et on lui imprime, avec précaution toutefois, un mouvement brusque de rotation, suffisant pour dégager la dent *d*.

Évidemment la régularité de la marche exige l'isochronisme des oscillations du balancier. Comme ces oscillations varient d'amplitude, par suite des résistances variables avec le temps du rouage et des pivots qui diminuent peu à peu l'action de la force motrice, il faut que cet isochronisme ait lieu quelle que soit l'amplitude des oscillations. Heureusement il y a deux manières de réaliser cet

Fig. 80.



isochronisme. La première a été découverte par Pierre Leroy, célèbre horloger français. Il a constaté qu'avec un ressort donné, en forme d'hélice cylindrique, on peut toujours, en le diminuant peu à peu de longueur, rencontrer à chaque spire une longueur telle que les grandes oscillations aient même durée que les petites.

La seconde manière de réaliser l'isochronisme sans toucher à la longueur du ressort est due à M. Phillips, professeur de Mécanique à l'École Polytechnique. Elle consiste à donner au ressort, dans les deux parties où il dévie de la forme hélicoïdale pour aller s'encastrer en haut dans le pont du balancier, en bas dans le corps du balancier lui-même, certaines formes géométriques que l'analyse fait connaître et que l'art réalise avec une grande perfection. Quand ces courbes terminales sont bien exécutées, les réactions que les parties encastrées exercent sur la lame se réduisent à un couple, et la figure du ressort, hélicoïdale à l'état de repos, reste encore hélicoïdale dans ses contractions et dilatations successives à l'état du mouvement. Le centre de gravité du spiral oscillant ne cesse pas de coïncider avec son axe. Enfin les réactions latérales des pivots sont nulles ; en d'autres termes, les pivots n'ont aucune

tendance à exercer une pression latérale contre leurs supports. Tous les chronomètres construits d'après ces principes ont une marche régulière.

Réglage des chronomètres.

Un chronomètre doit battre à très peu près 86400ˢ par jour solaire moyen. S'il en bat $86400 - m$, m est le retard diurne ou la marche diurne du chronomètre. Cette marche m, positive ou négative, doit toujours être réduite à un petit nombre de secondes. Pour obtenir ce résultat dans une horloge, on fait varier peu à peu la longueur l du pendule. En effet, la durée t d'une oscillation d'un pendule de longueur l est, en secondes de temps moyen,

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

g étant l'intensité de la pesanteur au lieu considéré. Or π est un nombre constant; g ne varie pas tant que le pendule reste au même lieu : il suffit donc d'agir sur l, de le raccourcir si l'horloge retarde, de l'allonger un peu si elle avance, jusqu'à ce qu'enfin m soit réduit au point jugé convenable. Cette opération est si simple, qu'il n'est pas besoin d'un horloger pour l'exécuter.

Quant aux chronomètres, la durée d'une oscillation est

$$\pi\sqrt{\frac{l\mathrm{I}}{\mathrm{E}}},$$

formule où l représente la longueur du spiral, E son moment d'élasticité, I le moment d'inertie du balancier. Dans les montres ordinaires se trouve une raquette qui permet d'allonger ou de raccourcir quelque peu le spiral, et par suite de faire varier l de manière à produire le même effet que sur le pendule. On parvient ainsi à régler une montre ordinaire et à réduire sa marche diurne au taux convenable. Mais, en agissant de même sur le spiral hélicoïdal d'un chronomètre, on altérerait, comme on l'a vu plus haut, l'isochronisme de ses oscillations; c'est donc sur le facteur I, moment d'inertie du balancier, qu'il faut opérer pour en faire varier quelque peu la durée. A cet effet, la barrette du balancier porte à ses deux

bouts des vis C et D à têtes très massives (*fig.* 80). En les faisant tourner délicatement à la fois (pour ne pas troubler l'équilibre du balancier), de manière à les rapprocher, par exemple, du centre des oscillations, I diminue et par suite la durée de l'oscillation devient moindre. On réussit par là, au moyen de tâtonnements d'une grande délicatesse qui ne peuvent être confiés qu'à un homme de l'art, à annuler ou du moins à réduire la marche d'un chronomètre. Un astronome règle sa pendule quand il lui plaît; un marin ne doit jamais toucher à son chronomètre, excepté pour le remonter.

Influence de la température. — Compensation.

Mais ce réglage des pendules ou des montres ne compte que pour la température à laquelle on a opéré. A d'autres températures, les chronomètres changent de marche comme les pendules, mais en vertu de causes bien différentes. Pour une horloge, lorsque la température augmente, l augmente aussi; comme c'est la seule quantité influencée, il suffit d'annuler l'effet de la température par l'artifice bien connu de la grille compensatrice. On rend ainsi l invariable à toute température. Dès lors une horloge dont le pendule est muni de cet appareil correcteur conserve la même marche l'hiver comme l'été, ou du moins ne varie plus qu'en vertu de causes tout à fait étrangères à la température. Il en est tout autrement des chronomètres: les trois facteurs l, I, E varient à la fois avec la température; l s'allonge quand celle-ci augmente; I augmente aussi, puisque les masses qui composent le balancier s'écartent du centre d'oscillation, et E, qui représente ici la force réglante et joue le même rôle que g dans les horloges, diminue. Il n'y a donc plus aucune analogie entre les montres et les horloges lorsqu'il s'agit de la compensation.

L'effet le plus considérable vient de l'élasticité du ressort, c'est-à-dire de la force régulatrice; son moment diminue à peu près de $\frac{1}{4000}$ pour 1° d'élévation de température. Comme E figure au dénominateur sous un radical dans l'expression précédente, l'augmentation de durée d'une oscillation sera, de ce chef, de $\frac{1}{8000}$; et comme il y a 86400 oscillations par jour exécutées sous l'action de cette force, le retard diurne dû à un seul degré d'augmentation de

température sera d'une dizaine de secondes. Il s'en faut de beaucoup que la variation correspondante de l ou de I produise un effet pareil. C'est donc la diminution de E qu'il faut compenser avant tout, en diminuant le moment d'inertie dans une proportion bien plus grande que l'effet directement exercé sur le balancier par la dilatation de son anneau. On n'y parviendrait pas en opposant dilatation à dilatation comme dans la grille compensatrice des pendules : il faut recourir à une combinaison encore plus sensible à l'action de la chaleur. On l'a trouvée dans les lames formées de deux métaux soudés et inégalement dilatables; ces lames se courbent fortement sous la moindre impression de chaleur, au point qu'on en a fait des thermomètres d'une sensibilité extrême.

L'anneau du balancier est coupé en deux points opposés A et B, près de la barrette à laquelle sont fixées les extrémités des deux demi-anneaux (*fig.* 79). Il est formé de deux lames courbes soudées, l'une extérieure en laiton, l'autre intérieure en acier, et portant vers les extrémités libres deux petites masses m et m'. Lorsque la température croît, la courbure de ces lames augmente et les masses m, m' se rapprochent très sensiblement du centre. Le moment d'inertie diminue ainsi bien plus qu'il ne le faudrait pour compenser la dilatation de la barrette. Comme ces masses peuvent glisser chacune le long du demi-anneau qui la porte, l'horloger cherche, par un tâtonnement excessivement délicat, la position où il doit fixer ces masses pour compenser les variations des facteurs l et I, et surtout celle de E. Il opère successivement à deux températures très différentes, 0° et 30° par exemple, et déplace les masses compensatrices jusqu'à ce qu'il ait obtenu la même marche dans les deux cas.

Si l'on connaissait exactement la loi suivant laquelle E varie avec la température, on chercherait la forme qu'il faudrait donner au balancier pour compenser exactement les variations de E. Il suffirait, en effet, que les petits changements ΔI et ΔE produits par un même accroissement de température fussent proportionnels à I et à E. Le chronomètre, une fois compensé à deux températures extrêmes, le serait aussi pour toutes les températures intermédiaires. Malheureusement cette proportionnalité n'existe pas ou ne se réalise qu'accidentellement; il en résulte qu'entre 0° et 30° le chronomètre prendra en général du retard; au delà de 0° ou

de 30° il prendra de l'avance, ou réciproquement. La compensation la mieux exécutée de cette manière laisse donc subsister une partie de l'influence de la chaleur que les horlogers appellent l'*erreur secondaire*, erreur dont les marins doivent tenir compte avec le plus grand soin s'ils veulent tirer bon parti de leurs chronomètres. Par ce qui précède, on voit clairement que cette erreur secondaire offre un caractère régulier; c'est une fonction plus ou moins simple de grandeurs physiques susceptibles de mesure. Il est vrai que la Mécanique et l'Analyse ne sont pas en état aujourd'hui d'en déterminer la forme *a priori*, en considérant la figure des pièces, leurs dilatations, les variations de leur élasticité; mais nous étudierons cette loi par la voie de l'expérience, méthode dont ce Cours présente plusieurs exemples.

Le chronomètre doit être débarrassé de son enveloppe et placé dans une étuve dont on fait varier à volonté la température. Lorsque la température de la première épreuve, 0° par exemple, est bien établie et maintenue constante pendant un temps suffisant, on détermine la marche diurne du chronomètre en le comparant à une pendule astronomique à plusieurs heures d'intervalle. On porte ensuite l'étuve à une température plus élevée, mais très graduellement, car une variation brusque aurait pour effet d'altérer la trempe ou l'élasticité du spiral. On détermine encore la marche à cette température par de nouvelles comparaisons avec la pendule de l'observatoire. En opérant ainsi successivement à des températures bien connues, de 0° à 30° par exemple, on parcourt toute l'échelle des températures auxquelles l'instrument sera exposé dans le cours d'une campagne ordinaire. On s'assure d'ailleurs, en revenant aux températures initiales, que le chronomètre reprend bien les marches déjà observées, en sorte que le phénomène qu'on étudie n'est pas troublé par des influences étrangères.

Cela posé, pour découvrir la loi de ces variations, il suffit de construire la courbe des marches, en prenant pour abscisses les températures θ et les marches m pour ordonnées. On obtient ainsi un certain nombre de points par lesquels on fera passer une ligne courbe, en s'attachant, non pas seulement à la continuité du trait, mais aussi à celle de la courbure. La figure de cette courbe sera la traduction géométrique de la loi cherchée. L'équation de cette

courbe, si l'on parvient à en découvrir l'espèce, sera l'expression analytique de la loi.

On trouvera dans mon *Astronomie nautique* des tracés empiriques de ces courbes pour des chronomètres différents. Ce sont de véritables paraboles ayant leur axe perpendiculaire à la ligne des abscisses. M. Lieussou, ingénieur hydrographe, à qui nous devons cette importante découverte, a trouvé effectivement cette figure parabolique dans les courbes de marche de tous les chronomètres qu'il a étudiés. Or l'équation des paraboles, ainsi placées par rapport aux coordonnées m et θ, est de la forme

$$m = a + b\theta + c\theta^2,$$

ou bien

$$m = \alpha + c(\theta - \tau)^2,$$

équation qui se confond avec la première si l'on pose

$$a = \alpha + c\tau^2, \quad b = -2c\tau.$$

La loi de l'erreur peut donc être énoncée ainsi : l'influence de la chaleur sur la marche d'un chronomètre est proportionnelle au carré de sa température, comptée à partir d'un certain degré du thermomètre. M. Lieussou a donné à ce degré le nom, peu usité aujourd'hui, de *température de réglage*. Depuis lors, cette loi a été vérifiée en tous pays pour tous les chronomètres convenablement étudiés; elle est universellement adoptée dans la pratique.

Outre l'influence de la température, les chronomètres sont soumis à des causes diverses d'irrégularités dont les effets très compliqués se développent avec le temps. Telles sont l'épaississement des huiles, l'usure des pivots, les secousses, les mouvements gyratoires imprimés au navire par le choc des lames, les trépidations du propulseur, etc. Ces causes échappent à toute analyse; c'est à elles que sont dues les anomalies que présentent souvent la marche des meilleurs chronomètres et même leur arrêt.

Conduite des chronomètres à la mer.

Ils doivent être enfermés dans une armoire à l'abri des variations

notables de température. L'officier chargé des montres les remonte chaque jour à 9^h, lit le thermomètre de l'armoire et calcule, pour chaque chronomètre, la marche diurne par la formule

$$m = a + b\theta + c\theta^2.$$

Avant le départ, on a déterminé, par des observations astronomiques ou par le télégraphe, le retard ε du chronomètre sur l'heure de Paris à une certaine date. Chaque jour on ajoute à ce retard la marche diurne m, en sorte que, au bout de t jours après la date susdite, le retard du chronomètre sera $\varepsilon + m + m' + m'' + \ldots.$ On sera donc en état de calculer ce retard pour une heure quelconque d'un jour donné.

Sur les navires de l'État on embarque plusieurs chronomètres, afin d'obtenir par leur accord ou leur désaccord un certain contrôle de leur marche et parer ainsi, jusqu'à un certain point, aux chances de dérangement. Cependant ce procédé, bien préférable à l'emploi d'un seul chronomètre, ne donne pas une garantie suffisante pour peu que la traversée se prolonge au delà d'une certaine limite. Il faut que le navigateur soit en état de se passer de ses chronomètres et de déterminer l'heure de Paris par des observations astronomiques.

La Connaissance des Temps.

Les Tables astronomiques du Soleil, des Planètes et de la Lune, dues principalement aux travaux des astronomes et des géomètres français, permettent de calculer, pour un instant quelconque, dans les siècles passés ou dans les siècles à venir, les coordonnées de ces astres. Mais ces calculs sont si longs, surtout quand il s'agit de la Lune, que l'usage habituel de ces Tables serait absolument impraticable pour les marins. Depuis deux siècles, époque où la grande navigation a pris son essor, l'État a compris qu'il fallait faire calculer d'avance, pour les marins, les voyageurs et les astronomes, des éphémérides donnant les positions du Soleil, de la Lune et des principales planètes, de jour en jour, à une certaine heure (midi) en temps moyen de Paris, de manière qu'on en pût tirer à vue, ou par une simple partie proportionnelle, les coordonnées de ces astres à une heure et pour un méridien quelconques. C'est dans ce

but que le Bureau des Longitudes a été chargé de publier chaque année, au moins deux ans d'avance, la *Connaissance des Temps*.

Elle donne pour chaque midi, temps moyen de Paris, les coordonnées écliptiques et équatoriales du Soleil et des planètes.

Quant à la Lune, la rapidité et les inégalités de ses mouvements sont telles qu'il a fallu resserrer beaucoup cet intervalle. La *Connaissance des Temps* donne les coordonnées de la Lune d'heure en heure, d'un bout à l'autre de l'année, et de trois heures en trois heures ses distances angulaires au Soleil, aux planètes visibles et aux plus belles étoiles. Enfin les coordonnées, les positions de trois cents étoiles fondamentales sont calculées de dix en dix jours.

La *Connaissance des Temps* publie en outre les éclipses de Lune et de Soleil, les occultations des étoiles par la Lune et les éclipses des satellites de Jupiter. On y trouve des Tables de réfraction, de parallaxe, et les positions géographiques les plus exactes des principales villes et ports des deux hémisphères. On y ajoute une instruction détaillée, pour les calculs d'ailleurs fort simples qu'il faut exécuter lorsqu'on doit faire emploi de cette éphéméride.

Les navigateurs emportent avec eux le volume de la *Connaissance des Temps* dont ils auront besoin. Ils y puisent les coordonnées des astres qu'ils observent journellement pour déterminer leur position. Celles du Soleil sont exactes, à la seconde près. Celles des planètes n'ont pas tout à fait la même précision, mais les erreurs des Tables ou des éphémérides ne dépassent guère 5″ ou 6″.

Quant à la Lune, les Tables de Hansen, qui ont remplacé celles de Damoiseau, sont actuellement en erreur d'un quart de minute, et cette erreur ira en croissant; mais on leur applique une correction empirique en attendant qu'elles soient remplacées par les Tables purement théoriques de Delaunay. Les données de la *Connaissance des Temps* répondent ainsi à toutes les exigences de la pratique.

Finalement il faut considérer les coordonnées des astres, telles qu'on les déduit, à vue ou par interpolation, de la *Connaissance des Temps*, comme des données exactes; il n'y a donc lieu de se préoccuper que des erreurs beaucoup plus fortes qui peuvent affecter les observations.

CHAPITRE XXXVII.

PROBLÈMES DE LA NAVIGATION ASTRONOMIQUE.

Ils se réduisent à ces termes : déterminer, à un instant donné, par les astres, la colatitude λ, la longitude L, l'azimut A.

Comme $L = H - H_p$, si l'heure de Paris est donnée par les chronomètres avec une précision suffisante, le problème se ramène, pour la longitude, à déterminer l'heure du bord H.

Dans les formules de transformation (t. I, p. 59),

$$(a) \qquad \cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos\text{Æ},$$

$$(b) \qquad \sin z\cos A = \sin\lambda\cos\delta - \cos\lambda\sin\delta\cos\text{Æ},$$

$$(c) \qquad \sin z\sin A = \sin\delta\sin\text{Æ},$$

on voit figurer les trois inconnues λ, H et A avec la donnée δ qu'on prend dans la *Connaissance des Temps* pour la date de l'observation, et la distance zénithale z que l'on mesure. En effet, s'il s'agit d'une étoile, $\text{Æ} = H_s + \text{Æ}$; et s'il s'agit du Soleil, $\text{Æ} = H_v = H + e$. Or Æ, ascension droite de l'étoile, ou e, équation du temps, se trouvent dans la *Connaissance des Temps*, et, si l'on doit passer par l'heure sidérale H_s, le même recueil donne le moyen bien simple d'en conclure l'heure H de temps moyen.

Le problème se trouvera donc pleinement résolu par de simples mesures de distances zénithales pour l'heure et la colatitude. Quant à l'azimut d'un objet terrestre quelconque, il suffira de mesurer la distance angulaire du Soleil à l'objet, à un instant donné, et de déduire des formules (b) et (c) l'azimut du Soleil à cet instant.

On a vu (t. I[er], p. 125) que, pour obtenir la colatitude indépendamment de l'heure, et avec toute l'exactitude que comportent les observations de distance zénithale, il faut observer le Soleil très

près du méridien, et que, pour obtenir l'heure indépendamment de l'erreur à craindre sur la colatitude, il faut observer l'astre choisi très près de l'azimut de 90° ou de 270°. De là la pratique adoptée par les navigateurs : elle consiste à mesurer la distance zénithale du Soleil à l'instant de sa culmination pour en déduire λ, et à l'observer le même jour, le matin ou le soir, aussi loin que possible du méridien, pour obtenir l'heure.

Culmination.

C'est le point le plus élevé du parallèle diurne décrit par le Soleil. Ce point serait dans le méridien du lieu si le δ du Soleil était invariable et si le navire ne faisait pas de route en colatitude; mais ces deux circonstances ne donnent lieu qu'à des corrections très faibles, que nous négligerons d'abord. Voici en quoi consiste l'observation de midi. On commence l'observation avec le sextant un peu avant midi ; en d'autres termes, on amène l'image doublement réfléchie du Soleil en contact avec l'horizon par son bord inférieur; puis, comme le Soleil continue à monter quelque peu, les deux images se séparent. On rétablit le contact à l'aide de la vis micrométrique, et on saisit bien aisément le moment où il se maintient de lui-même sans qu'il soit besoin d'agir sur la vis : c'est celui où la hauteur angulaire de l'astre atteint son maximum. On lit alors sur l'instrument la hauteur h du bord observé. En désignant par $\rho, p, \frac{1}{2}\Delta$ la réfraction, la parallaxe et le demi-diamètre du Soleil, on a, pour la distance zénithale méridienne,

$$90° - h + \rho - p + \tfrac{1}{2}\Delta = z_m$$

et on en conclut λ par

$$\lambda = \delta - z_m.$$

Cette formule répond à tous les cas, c'est-à-dire à toutes les positions où l'observateur peut se trouver sur le globe terrestre, pourvu qu'on donne à z_m le signe + si l'on a observé au sud et le signe — si l'on a observé au nord (t. I, p. 125).

Inutile d'ajouter que, si un obstacle quelconque faisait manquer

l'observation de midi, on la remplacerait par des observations circumméridiennes (t. I, p. 133).

Détermination de l'heure et de la longitude.

Le soir on mesure la distance zénithale du Soleil à l'heure H_p du chronomètre. Soient z cette distance zénithale corrigée de la réfraction et de la parallaxe, λ la colatitude obtenue en ajoutant, à celle qu'on a observée à midi, le chemin parcouru dans le sens du méridien. La même relation (a), résolue par rapport à $\mathcal{R}$, donnera l'angle horaire du Soleil, c'est-à-dire l'heure solaire vraie. On aura ainsi

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - \delta + \lambda)\sin\tfrac{1}{2}(z + \delta - \lambda) = \sin\lambda\sin\delta\sin^2\tfrac{1}{2}\mathcal{R}.$$

De $\mathcal{R} = H_v$ on conclut l'heure moyenne H par $H = H_v - e$, e étant l'équation du temps fournie par l'éphéméride, et de H on conclut la longitude par $L = H - H_p$, H_p étant l'heure marquée par le chronomètre.

On a vu (t. I, p. 126) que l'erreur à craindre sur λ aura d'autant moins d'influence sur l'$\mathcal{R}$ conclu que l'observation aura été faite plus près de l'azimut de 90° ou de 270°. On appréciera cette influence et celle de l'erreur commise dans la mesure de z par la relation différentielle

$$\sin\lambda\, d\mathcal{R} = \frac{dz}{\sin A} + \frac{d\lambda}{\operatorname{tang} A}.$$

Cette relation montre que, pour les mêmes erreurs dz et $d\lambda$, et les mêmes circonstances d'observation, c'est-à-dire à égalité d'azimut, la précision de l'heure ainsi obtenue décroît avec la colatitude.

Azimut. Orientation.

Soient V l'angle de route, c'est-à-dire l'azimut où se trouve le cap du navire, (A) la différence d'azimut entre cette direction et celle du Soleil, et A l'azimut du Soleil au même instant. On aura $V = (A) + A$. Si donc à un instant donné, H heure du lieu, on mesure l'angle (A) à l'aide de la boussole de relèvement, fonctionnant comme théo-

dolite, il suffira, pour avoir V, d'ajouter à (A) l'azimut actuel du Soleil. De H on conclut l'angle horaire $\mathcal{H} = H_\nu$, puis on calcule A par la formule résultant de la division de (b) par (c)

$$\cot A \sin \mathcal{H} = -\sin\lambda \cot\delta + \cos\lambda \cos\mathcal{H}.$$

Variation du compas.

Si au même instant on lit, sur la boussole de l'habitacle, l'azimut magnétique M' de la route suivie, et que l'on désigne par δ la déclinaison de l'aiguille aimantée et par D la déviation due aux fers du navire, on aura

$$M' + D + \delta = V = A + (A),$$

relation qui fera connaître la variation $D + \delta$, et même la déviation D si δ est connu pour le lieu de l'observation.

Discussion de cette méthode.

Elle ne portera que sur l'observation de la culmination du Soleil ou de la Lune. Ce moyen de déterminer la colatitude est précieux en voyage, parce qu'il n'exige même pas de montre. Si l'astre observé était une étoile, l'instant de la culmination coïnciderait avec celui du passage au méridien. Il en est autrement lorsque la distance polaire δ varie avec le temps et quand l'observateur est placé sur un navire en pleine marche. Différentions l'équation (a) par rapport à toutes les quantités qu'elle renferme en les considérant comme des fonctions du temps :

$$\begin{aligned}\sin z \frac{dz}{dt} &= (\sin\lambda \cos\delta - \cos\lambda \sin\delta \cos\mathcal{H}) \frac{d\lambda}{dt} \\ &+ (\cos\lambda \sin\delta - \sin\lambda \cos\delta \cos\mathcal{H}) \frac{d\delta}{dt} \\ &+ \sin\lambda \sin\delta \sin\mathcal{H} \frac{d\mathcal{H}}{dt}.\end{aligned}$$

A l'instant de la culmination, z atteint sa valeur maximum : par conséquent $\frac{dz}{dt} = 0$. D'autre part, $\mathcal{H}$ étant très petit, on remplacera

$\cos Æ$ par 1 et $\sin Æ$ par $\frac{Æ}{3438'}$, en exprimant l'angle $Æ$ en minutes d'arc. On a ainsi

$$Æ = 3438' \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta \sin\lambda} \frac{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\delta}{dt}}{\frac{dÆ}{dt}}.$$

Il faudra porter cette expression dans celle de la réduction au méridien (t. I, p. 128 et 133), ce qui donne, en remarquant que $\sin(\delta - \lambda) = \sin z_m$ est bien peu différent de $\sin\frac{z + z_m}{2}$, et en représentant par K le dernier facteur de la précédente formule,

$$z - z_m = \frac{3438'}{2} \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin z} K^2.$$

Le calcul de K ne présente aucune difficulté. Les variations qu'il comprend étant sensiblement constantes pour une heure entière, on remplacera $\frac{d\delta}{dt}$, par exemple, par $\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$, en faisant $\Delta t = 1^h$ ou 15° ou $900'$, et en mettant pour $\Delta\delta$ la variation horaire de δ. De même $\frac{d\lambda}{dt}$ sera égal au quotient du nombre de milles parcourus en une heure par le vaisseau, dans le sens du méridien, divisé par $900'$. Quant à $\frac{\Delta Æ}{\Delta t}$, on a, s'il s'agit du Soleil,

$$Æ = H_p + L - e, \quad \text{d'où} \quad \Delta Æ = \Delta H_p + \Delta L - \Delta e,$$

expression où l'on remplacera ΔH_p par $900'$.

S'il s'agissait de la Lune, on aurait

$$Æ = H_{sp} + L - Æ;$$

par suite

$$\Delta Æ = \Delta H_{sp} + \Delta L - \Delta Æ.$$

Il est aisé de s'assurer que la correction qui en résulterait ne s'élévera pas à $2'$, dans les circonstances les plus défavorables. On a donc raison de la négliger à la mer. Pour des observations soignées, faites à terre, il faudrait tenir compte de $\frac{d\delta}{dt}$.

Détermination simultanée de l'heure et de la colatitude. Problème de Douves. Solution de Lalande.

La pratique précédente suppose un ciel découvert juste à l'instant favorable. S'il en était autrement, on obtiendrait encore l'heure et la colatitude à l'aide de deux distances zénithales mesurées à des instants quelconques de la journée. C'est un problème fort simple, dont un navigateur hollandais, nommé Douwes, a donné autrefois une solution satisfaisante.

Soient z et z' les distances zénithales du Soleil mesurées aux heures H_p et H'_p du chronomètre ($H_p - e$ et $H'_p - e'$ seront les heures vraies en temps de Paris), δ et δ' les distances polaires, λ_1 et L_1 les coordonnées estimées du navire à l'instant de la première observation, enfin $\Delta\lambda$ et ΔL les changements en colatitude et en longitude qui se sont opérés dans l'intervalle des deux observations. Si $\mathcal{H}$ représente l'angle horaire inconnu du Soleil au premier instant, l'angle horaire au deuxième sera

$$\mathcal{H} + 15(H'_p - e' + \Delta L) - 15(H_p - e),$$

ou $\mathcal{H} + \alpha$, en désignant par α une quantité immédiatement calculable, et on aura les deux équations

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos\mathcal{H},$$
$$\cos z' = \cos(\lambda - \Delta\lambda)\cos\delta' + \sin(\lambda - \Delta\lambda)\sin\delta' \cos(\mathcal{H} + \alpha),$$

entre les inconnues λ et $\mathcal{H}$.

Nous verrons plus loin que la première équation représente, sur la sphère, un cercle de rayon z, que la deuxième est un second cercle de rayon z' légèrement déformé. Ces deux courbes se couperont en deux points, ce qui constitue deux solutions. Mais il n'y aura pas à hésiter entre les deux valeurs qu'on en pourrait tirer pour $\mathcal{H}$, puisque nous avons déjà, par l'estime, une solution approchée λ_1 et L_1, d'où l'on déduit $\mathcal{H}_1 = H_p - e + L_1$.

Le plus simple est de résoudre ces équations par les méthodes d'approximation qu'on enseigne en Algèbre. Nous suivrons en cela la voie tracée par Lalande. Des deux coordonnées que fournit

l'estime, la plus sûre est ordinairement λ_1. Portons-en la valeur dans les deux équations et désignons par AH_2, AH'_2 les valeurs qu'on en déduira pour l'angle horaire. Si λ_1 se trouvait être juste, ces deux valeurs du premier angle horaire seraient égales, c'est-à-dire qu'on trouverait

$$\mathit{AH}_2 = \mathit{AH}'_2;$$

mais, en général, ces deux équations donneront, par ce premier essai, deux valeurs différentes. Désignons par $\partial\lambda$ la petite correction qu'il faut appliquer à λ_1. Si l'on augmente λ_1 de $\partial\lambda$, AH_2 augmentera de $\frac{\partial\lambda}{\sin\lambda\operatorname{tang}A}$ (t. I, p. 126), et AH'_2 de $\frac{\partial\lambda}{\sin(\lambda+\Delta\lambda)\operatorname{tang}A'}$. On aura donc, pour déterminer la correction inconnue $\partial\lambda$, l'équation de condition

$$\mathit{AH}_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin\lambda\operatorname{tang}A} = \mathit{AH}'_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin(\lambda+\Delta\lambda)\operatorname{tang}A'}.$$

La correction $\partial\lambda$ étant obtenue, les éléments relatifs à la première observation seront $\lambda = \lambda_1 + \partial\lambda$, $\mathit{AH} = \mathit{AH}_2 + \frac{\partial\lambda}{\sin\lambda\operatorname{tang}A}$, d'où résulte immédiatement la longitude L.

La formation de cette équation de condition exige le calcul des deux azimuts par les formules rappelées plus haut. On y emploie des tables à trois décimales.

Si l'on trouvait ainsi pour $\partial\lambda$ une valeur un peu forte, il y aurait lieu de craindre que les termes du deuxième ordre, omis dans le développement de AH, ne fussent pas négligeables (¹). On regarderait alors le calcul effectué comme une première approximation. En le recommençant avec la valeur beaucoup plus exacte $\lambda_1 + \partial\lambda$, on obtiendrait, cette fois, une approximation bien suffisante.

(¹) La variation de AH, correspondant à une variation $\partial\lambda$ de λ, peut être en effet développée en série suivant les puissances croissantes de $\partial\lambda$. Le premier terme est $\frac{1}{\sin\lambda\operatorname{tang}A}\partial\lambda$; on admet ici que $\partial\lambda$ est assez petit pour que les termes suivants en $(\partial\lambda)^2$, $(\partial\lambda)^3$, ... soient négligeables. Dans le cas contraire, on opère, comme il est dit plus haut, par approximations successives.

Influence des erreurs d'observation.

Dans l'équation finale

$$\partial\lambda\left[\frac{1}{\sin(\lambda+\Delta\lambda)\tang A'}-\frac{1}{\sin\lambda\tang A}\right]=\mathit{H}'_2-\mathit{H}_2,$$

le second membre est affecté des erreurs commises sur les mesures de z et de z'. Pour que ces erreurs influent le moins possible sur la correction conclue $\partial\lambda$, il faut agencer les observations de manière à rendre son coefficient aussi grand que possible. De là la règle qui prescrit d'observer dans deux directions azimutales faisant entre elles un angle bien ouvert, et aussi près que possible de 90° (1).

On a retourné ce problème de toutes les façons sans réussir à trouver de solution meilleure que celle de Lalande.

Droites et cercles de hauteur.

Nous avons vu qu'à l'aide des cartes marines on substitue, au calcul, des constructions graphiques fort simples pour résoudre les divers problèmes de routes. On a cherché à en faire autant pour les problèmes astronomiques. C'est à quoi l'on parvient aisément en recourant à des cartes stéréographiques qui permettent de construire avec la règle et le compas tous les problèmes de la Trigonométrie sphérique. Mais, comme ces projections ne sont guère en usage à bord, on désirait utiliser les cartes de route ordinaires. Voici ce qui a mis les chercheurs sur la voie, il y a une quarantaine d'années.

Le capitaine Sumner se trouvait, en 1837, près de la côte d'Irlande (à destination de Grennock), sans avoir pu faire d'observation astronomique depuis qu'il avait dépassé le méridien de 318°30'.

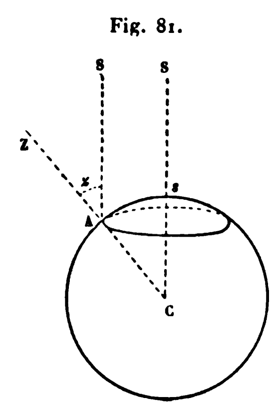
Dans la nuit du 17 décembre, le vent ayant passé au sud-est et l'estime donnant 400 milles du phare de Tuscan, avec la terre

(1) En effet, en négligeant $\Delta\lambda$, le facteur de $\partial\lambda$ revient à $\frac{\sin(A'-A)}{\sin\lambda\sin A\sin A'}$.

sous le vent, il gouverna est-nord-est, serrant le vent le plus possible. Quand le jour parut, rien n'était encore en vue. Vers $10^h 30^m$ seulement, le commandant put prendre une hauteur du Soleil. Avec le chronomètre (un bon instrument), il calcula sa longitude et trouva $339^\circ 43'$; mais, comme il avait fait près de 700 milles sans une seule observation, la colatitude employée dans le calcul de l'heure ne méritait aucune confiance. Pour apprécier l'effet d'une erreur possible en colatitude, il calcula encore deux autres longitudes, en partant chaque fois d'une colatitude de 10' moins grande. Les trois points ainsi obtenus ayant été marqués sur la Carte, Sumner remarqua qu'ils se trouvaient sur une même droite dirigée est-nord-est et aboutissant au bateau-phare de Small, et comme son vaisseau devait se trouver sur cette droite (bien entendu dans la supposition d'une erreur nulle pour le chronomètre), la route est-nord-est fut maintenue, et le capitaine Sumner eut la satisfaction de se voir bientôt en vue du phare de Small.

La ligne à laquelle appartenaient ces trois points n'était pas rigoureusement une droite, mais l'élément à peu près linéaire d'un cercle de tous les points duquel des observateurs auraient vu le Soleil, au même instant, par la même distance zénithale que le

Fig. 81.



capitaine américain. En effet, considérons l'observateur situé en A et mesurant, à l'heure moyenne H_p, la distance zénithale ZAS $= z$ du Soleil. Menons la droite SC qui joint le Soleil au centre de la Terre et qui rencontre le globe en s. L'angle ZCS sera la distance

zénithale géocentrique ou z. Cela posé, faisons tourner la figure autour de la droite CS. Le point A décrira sur le globe un petit cercle dont le pôle sera s, et dont le rayon sA sera l'arc qui mesure l'angle z.

Il est aisé de déterminer les coordonnées du point s, point où le rayon vecteur CS du Soleil perce la surface terrestre à l'heure H_p. D'abord sa colatitude Ps est évidemment égale à la distance polaire δ de l'astre. Ensuite l'angle horaire du Soleil à Paris étant $H_p - e$, cet angle est égal à l'angle compris, sur le globe terrestre, entre le méridien de Paris et celui du point s. Comme les longitudes géographiques se comptent, à partir du méridien de Paris, en sens inverse des Æ, $360° - (H_p - e)$ sera celle du point s. Vous voyez qu'il est facile de marquer ce point sur une carte, et, si elle est stéréographique, de construire le cercle de rayon z dont le centre (sur la sphère) est en s. Dire qu'à l'heure H_p de Paris, ou $H_p + L$ d'un certain lieu, le Soleil avait pour distance zénithale z, c'est dire que l'observateur se trouvait quelque part sur ce cercle. Une seule observation ne donne rien de plus.

On ne saurait tracer ce cercle sur une projection de Mercator; sa transformée est bien trop compliquée. On peut du moins le construire par points à l'aide de son équation.

Soient λ et L les coordonnées inconnues de l'observateur A; l'angle horaire du Soleil à l'instant H_p sera $H_p - e + L$. On aura donc l'équation

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos(H_p - e + L).$$

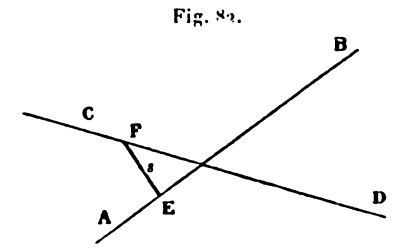
Elle s'appliquera à tous les points de la circonférence susdite, pourvu qu'on y regarde λ et L comme des coordonnées courantes. Cela posé, donnez à λ une série de valeurs arbitraires, distantes de $10'$ en $10'$, à commencer par la colatitude approchée que fournit l'estime, et calculez les L correspondants à l'aide de cette équation. Les points ainsi déterminés et portés sur la carte marine seront sur la courbe qui y représente le cercle susdit, et, comme il s'agit d'une courbe à grand rayon, de 30, 40, 50, ... degrés, cette petite portion de courbe se confondra sensiblement avec la tangente AB (*fig.* 82).

Pour tracer cette tangente sur la carte, deux points, calculés

comme nous venons de le dire, suffiront. Elle porte le nom de *droite de hauteur*. Le navire doit se trouver quelque part sur cette portion de droite un peu prolongée des deux bouts.

Il est facile de voir qu'elle sera perpendiculaire à la direction

Fig. 82.



azimutale où l'on a observé le Soleil. Cette direction est en effet As (*fig.* 81), trace horizontale du vertical du Soleil et rayon du cercle de hauteur. Par conséquent, si on a déterminé l'azimut du Soleil (au compas de relèvement fonctionnant, non plus comme théodolite, mais comme une boussole dont on connaîtrait bien la variation), on pourra se contenter de calculer un point de la droite de hauteur et de mener, par ce point, une droite perpendiculaire à cette direction azimutale.

Si, quelque temps après, à l'heure H'_p, le navire ayant fait le chemin $\Delta\lambda$ en colatitude et ΔL en longitude, on observe de nouveau le Soleil par la distance zénithale z', on aura pareillement

$$\cos z' = \cos\lambda\cos\delta' + \sin\lambda\sin\delta'\cos(H'_p - e' + L),$$

λ et L étant encore, sur la carte, les coordonnées courantes d'un second cercle de hauteur. Remplaçons-le pareillement par une droite de hauteur CD. Dès lors, à l'heure H_p, le navire a dû se trouver quelque part sur AB; à l'heure H'_p sur CD, et dans l'intervalle il a décrit à la surface du globe une petite droite s, sous l'angle de route V, éléments qu'on déduit de $\Delta\lambda$, ΔL et de la colatitude de l'estime λ, par les formules (p. 357)

$$s\cos V = \Delta\lambda,$$
$$s\sin V = -\Delta L\sin\lambda.$$

La question est donc ramenée à ce petit problème de Géométrie :

mener entre les deux droites AB, CD, sous un angle donné V (avec les méridiens de la carte), une droite EF de longueur s. Les points E, F seront les positions du navire aux heures H_p, H'_p [1].

On a varié ces constructions de toutes les manières; mais comme, après tout, elles exigent presque autant de calculs que la méthode de Lalande, outre des constructions graphiques plus ou moins embarrassantes, nous ne comprenons pas que les marins attachent tant d'importance à ce qu'ils appellent les nouvelles méthodes. Au fond, les droites de hauteur ne sauraient avoir d'utilité que dans le cas particulier où s'est trouvé le capitaine Sumner, celui où l'on doit atterrir avec des observations astronomiques incomplètes.

---

[1] Il est à remarquer que la seconde équation de la p. 384, relative à la méthode de Lalande, ne se confond pas avec celle de la p. 389 et ne représente pas un cercle sur la sphère quand l'observateur s'est déplacé.

CHAPITRE XXXVIII.

DÉTERMINATION DES LONGITUDES EN MER.

Heure de Paris par le relèvement de points terrestres connus.

Lorsqu'on fait relâche dans un port dont la situation géographique est bien connue, le navigateur s'empresse d'en profiter pour rectifier ses chronomètres. Par des observations de hauteur du Soleil prises à terre, à l'aide d'un horizon artificiel, il détermine l'heure locale avec précision et par suite l'heure de Paris. En la comparant avec celle que donnent ses chronomètres, il obtient la correction qu'il faut leur appliquer dans le reste du voyage.

Lors même qu'on ne fait que passer à proximité d'un point connu, il est facile de déterminer, par des relèvements au compas, la position exacte du navire et sa longitude. Des hauteurs du Soleil prises immédiatement après, à bord, donnent le même résultat que si l'on avait opéré à Terre.

On voit combien il est utile de fixer très exactement, surtout en longitude, la position de ces points qui se trouvent en vue sur les trajets les plus fréquentés. Le Bureau des Longitudes a fait déterminer avec précision, par des observations astronomiques, la longitude de certains points principaux. Le transport des chronomètres, à partir de ces points, le long d'une côte étendue, donne ensuite leur différence de longitude avec une foule de points moins importants. On parvient ainsi à multiplier les données géographiques qui peuvent être utiles aux navigateurs.

Aujourd'hui l'on possède, dans les câbles sous-marins qui unissent les uns aux autres les centres commerciaux, un moyen de déterminer les longitudes avec une précision bien supérieure à ce que donnent les meilleures observations de la Lune. Dans peu d'années, le réseau des stations utiles sera ainsi complété, au grand bénéfice de la Navigation et de la Géographie.

Heure de Paris par les distances lunaires.

L'élément géographique le plus difficile à obtenir, loin des côtes, c'est la longitude, parce qu'elle implique la connaissance de l'heure de Paris. Les deux seuls moyens applicables en ce cas sont les chronomètres et les distances lunaires. Celles-ci sont la ressource dernière du marin, la seule sur laquelle il puisse compter absolument.

La *Connaissance des Temps* donne, pour tous les jours de l'année, de 3 heures en 3 heures du méridien de Paris, la distance de la Lune au Soleil, aux planètes et aux étoiles visibles en même temps qu'elle. Il suffit de jeter les yeux sur l'un de ces tableaux pour comprendre la méthode dont il s'agit. Ainsi, le 12 mai 1880, on a :

Heure de Paris.	Distance de la ☾ au ☉.
h	° ′ ″
0	35.11.36
3	36.32.30
6	37.53.27
9	39.14.27
12	40.35.31
15	41.56.38
18	43.17.48
21	44.39. 3

Si, le même jour, on mesure en un lieu quelconque, au sextant, la distance de la Lune au Soleil à $6^h 0^m 0^s$ heure locale, et qu'on trouve $39° 14' 27''$, on en conclura que l'heure correspondante de Paris était $9^h 0^m 0^s$. La longitude de la station était donc $21^h 0^m 0^s$. L'exactitude de ce procédé est fondée sur la rapidité des mouvements de la Lune. Le tableau ci-dessus montre que, de 6^h à 9^h, la distance des deux astres varie de $1° 21' 0''$, ce qui fait $\frac{1}{2}$ seconde d'arc par seconde de temps. Si donc la distance mesurée est en erreur de $0'',5$, l'heure de Paris conclue sera en erreur de 1^s. En mer, dans des circonstances favorables, on mesure ces distances à $0',1$ ou à $6''$ près : l'heure de Paris peut donc être obtenue par ce procédé à 12^s près.

Si l'on évalue la longitude conclue en arc, le rapport $\frac{1^s}{0'',5}$ devient $\frac{15}{0,5} = 30$ à peu près. Ainsi toute erreur sur la distance observée produit une erreur trente fois plus forte sur la longitude.

Observation des distances lunaires.

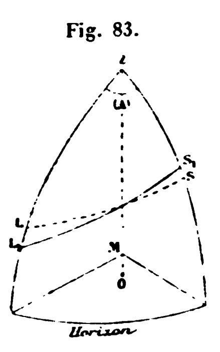
L'observateur, maintenant le sextant dans le plan des deux astres, pointe sur l'un d'eux avec la lunette et amène dans le champ l'image doublement réfléchie de l'autre. Les deux images étant placées entre les fils parallèles au limbe, on met les deux disques en contact par leurs bords et l'on note l'heure. Il y a là une condition essentielle : c'est d'affaiblir l'image la plus brillante par l'interposition de verres obscurcissants, de manière à les ramener toutes deux à la même intensité. Alors le contact des deux bords du Soleil et de la Lune s'effectue avec une véritable précision. Si au lieu du sextant on emploie le cercle de Borda, la mesure de la distance sera indépendante de toute excentricité; par des observations croisées, on élimine l'erreur d'origine des divisions, c'est-à-dire du point de parallélisme des miroirs; par la répétition, on supprime les erreurs de division et l'on atténue celle du pointé. Néanmoins, c'est là la plus difficile de toutes les observations astronomiques; il faut une adresse particulière et une grande habitude pour maintenir les deux astres dans le champ de la lunette, malgré les oscillations du navire.

Théoriquement, la seule difficulté de cette méthode consiste en ce que les distances lunaires, observées à la surface de la Terre, ne sont pas directement comparables à celles de la *Connaissance des Temps* qui sont calculées pour le centre de notre globe. Il faut donc les ramener à ce point par un changement d'origine dans les coordonnées, et en tenant compte de la réfraction. En outre, l'observation donne la distance des bords, tandis que la *Connaissance des Temps* donne celle des centres. De là une nouvelle réduction, qui consiste à ajouter, à la distance des bords, les demi-diamètres apparents des deux astres, en tenant compte de l'effet particulier de la réfraction.

Soient donc D_1 cette distance des centres observée d'un point M

de la surface du globe, z_1 et z'_1 les distances zénithales apparentes des deux astres S_1 et L_1 telles qu'on les observerait du même point M, (A) leur différence d'azimut, Z le zénith en M, et construisons le triangle sphérique $Z S_1 L_1$, dont les sommets seront les projections

Fig. 83.



des deux astres et du zénith sur la sphère céleste. Si l'on passe du point M au point O, situé (en supposant la Terre sphérique) sur la verticale MZ, les astres ne sortiront pas de leurs verticaux primitifs ZML_1, ZMS_1, et se projetteront seulement en d'autres points L et S sur les côtés ZL_1, ZS_1 de ce triangle. Leur distance $L_1 S_1$, vue du point M, que nous désignerons par D_1, deviendra la distance LS vue du centre de la Terre, distance que nous désignerons par D. Dans le premier cas, les côtés ZL_1, ZS_1 du premier triangle seront les distances zénithales apparentes des deux astres, affectées de la réfraction; dans le second triangle, les côtés ZL, ZS en seront les distances vraies et géocentriques. Ces deux triangles, qui ont l'angle (A) commun, nous donnent

$$(1) \qquad \cos D_1 = \cos z_1 \cos z'_1 + \sin z_1 \sin z'_1 \cos(A),$$

$$(2) \qquad \cos D = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos(A).$$

Les distances zénithales z, z', z_1, z'_1 sont connues; il suffira donc d'éliminer cos(A) entre ces deux équations pour avoir D, c'est-à-dire la distance géocentrique des deux astres, celle qu'on doit comparer aux distances calculées d'avance dans la *Connaissance des Temps* pour obtenir l'heure de Paris.

Évidemment la difficulté de ces calculs ne gît pas dans la combinaison des équations (1) et (2), encore plus faciles à résoudre que

celles du problème de Douwes, mais dans le détail des corrections de réfraction et de parallaxe qu'il faut appliquer ici. Nous allons voir, en effet, que ces corrections doivent être obtenues avec plus de précision qu'on n'en apporte d'ordinaire dans les calculs d'Astronomie nautique, et qu'on ne saurait se dispenser d'y tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre.

Conditions d'exactitude.

Notre attention doit se porter en premier lieu sur l'erreur commise dans la mesure de D_1. En différentiant (1) et (2) par rapport à D, D_1 et (A), puis, en divisant les résultats membre à membre, on trouve

$$dD = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1} \frac{\sin D_1}{\sin D} dD_1.$$

Pour le Soleil, dont la parallaxe est très faible, la réfraction l'emporte sur la parallaxe; aussi avons-nous placé S au-dessous de S_1 dans la figure précédente (c'est l'inverse pour la Lune). Le rapport $\frac{\sin z}{\sin z_1}$ est donc > 1, mais à peine différent de l'unité. De 10° à 70° de distance zénithale, il varie de 1,000254 à 1,000257. Le rapport analogue pour la Lune est plus petit que 1, et varie de 1 à 0,982. Il en est de même de $\frac{\sin D_1}{\sin D}$; sa variation est encore plus faible. Concluons de là qu'une petite erreur dD_1, commise dans la mesure de la distance apparente, se reportera avec son signe et presque sans altération (tout au plus de un ou deux centièmes) sur la distance conclue D. Si donc on négligeait, au commencement du calcul, d'apporter quelque petite correction à D_1, il serait permis de l'appliquer après coup à D.

Considérons en second lieu les erreurs des distances zénithales; pour cela, exprimons $D - D_1$ en fonction des différences $z - z_1$, $z' - z'_1$, et, pour abréger, désignons-les par les lettres x, α, α'. Remplaçons, dans l'équation (2), D, z, z' par $D_1 + x$, $z_1 + \alpha$, $z'_1 + \alpha'$; développons les sinus et cosinus en traitant x, α, α' comme de petites quantités dont les cosinus peuvent être remplacés par 1 et

les sinus par les arcs correspondants. Il viendra ainsi

$$\cos D_1 - x\sin D_1 = (\cos z_1 - \alpha\sin z_1)(\cos z'_1 - \alpha'\sin z'_1) + (\sin z_1 + \alpha\cos z_1)(\sin z'_1 + \alpha'\cos z'_1)\cos(A).$$

Effectuons les multiplications en omettant les carrés et les produits deux à deux de x, α, α'. Après avoir supprimé les termes qui se détruisent en vertu de l'équation (1), on aura

$$x\sin D_1 = \alpha[\sin z_1\cos z'_1 - \cos z_1\sin z'_1\cos(A)] + \alpha'[\sin z'_1\cos z_1 - \cos z'_1\sin z_1\cos(A)].$$

Or le triangle ZS_1L_1 donne

$$\sin D_1\cos S_1 = \sin z_1\cos z'_1 - \cos z_1\sin z'_1\cos(A),$$
$$\sin D_1\sin L_1 = \sin z'_1\cos z_1 - \cos z'_1\sin z_1\cos(A).$$

La relation précédente se réduit donc à

$$x = \alpha\cos S_1 + \alpha'\cos L_1.$$

Ainsi la réduction x de la distance apparente à la distance géocentrique dépend uniquement de α et de α', c'est-à-dire des corrections de réfraction et de parallaxe $z - z_1$, $z' - z'_1$, et elle est moindre que leur somme. Toute erreur sur z et z_1 à la fois, ou sur z' et z'_1, sera sans influence, à moins qu'elle ne soit assez grande pour fausser notablement les angles L_1 et S_1, ce qui est inadmissible. Il faut donc calculer avec soin les corrections susdites de réfraction et de parallaxe, et ne pas oublier que toute erreur finale commise sur D se reportera sur la longitude conclue avec le facteur 27, s'il s'agit d'une distance de la Lune à une étoile, et le facteur 29 ou 30, s'il s'agit d'une distance luni-solaire.

Cette même relation conduit à deux autres conséquences importantes. La première est qu'il n'est pas nécessaire de mesurer les distances zénithales apparentes z_1 et z'_1 des deux astres : il suffit de les calculer avec les éléments de l'estime (à moins que le Soleil ne soit bien placé pour donner l'heure du bord). Lorsqu'on se décide à les observer, il faut qu'elles répondent à l'instant où l'on mesure la distance D_1. Trois observateurs sont alors nécessaires pour déter-

miner, en même temps, la distance et les hauteurs. S'il n'y a qu'un seul observateur, il devra mesurer les hauteurs une première fois, puis la distance, enfin les deux hauteurs une seconde fois, afin que la moyenne des hauteurs soit sensiblement contemporaine de la distance.

Effet de la réfraction sur les disques du Soleil et de la Lune.

La réfraction élève l'astre dans l'angle dièdre formé par les deux verticaux qui le comprennent. Elle diminue ainsi le diamètre horizontal d'une très petite quantité que nous négligerons. Mais, par la différence des réfractions qui répondent au centre et aux bords, elle aplatit un peu le disque dans le sens vertical et lui donne une figure elliptique. Il est facile de tirer des tables de réfraction la quantité ε dont le demi-diamètre vertical est ainsi diminué, et l'on aura, à très peu près, pour le demi-diamètre situé dans la direction de la ligne des centres S_1L_1, sur laquelle nous admettrons que le contact des disques apparents s'opère,

$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 - \varepsilon\cos^2 S_1.$$

S_1 est l'angle du triangle ZS_1L_1, qu'on obtiendra par la formule

$$\cos z'_1 = \cos z_1 \cos\Delta_1 + \sin z_1 \sin\Delta_1 \cos S_1,$$

en calculant à trois décimales.

Dans l'exemple suivant :

$$z_1 = 77^\circ 42', \quad z'_1 = 45^\circ 25', \quad \Delta_1 = 38^\circ 42'.$$

On a de plus

$$\tfrac{1}{2}\Delta_1 = 15'51'',4, \quad \varepsilon = 6'',1,$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta'_1 = 14'54'',8, \quad \varepsilon' = 0'',5.$$

D'après cela, le calcul des rayons réfractés se réduit à

$\log\varepsilon$..........	0,786	$\log\varepsilon'$..........	9,726
$\log\cos^2 S_1$.....	9,886	$\log\cos^2 L_1$.....	9,555
	0,672		9,281
Nombre.......	4″,7	Nombre.......	0″,2
$\frac{1}{2}\Delta_1$..........	15′.51,4	$\frac{1}{2}\Delta'_1$..........	14′54″,8
$\frac{1}{2}\Delta'$ réfracté ...	15.46,7	$\frac{1}{2}\Delta'_1$ réfracté ...	14′54″,6

Ce sont là les demi-diamètres qu'il faut ajouter à la distance observée des bords pour avoir celle des centres.

Résolution des équations du problème.

En premier lieu, il est bien aisé de traiter directement ces équations en passant des logarithmes aux nombres et réciproquement. De (1) on tire la valeur de log cos(A) qu'on porte dans (2), et l'on obtient ainsi log cos D et par suite D. En calculant à sept décimales, on aura D à la seconde près, à moins que D ne soit très petit, cas exclu d'avance.

En second lieu, on peut rendre (1) et (2) calculables par logarithmes en posant $z_1 - z'_1 = \beta_1$, $z - z' = \beta$; elles prennent alors la forme

$$\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(D_1 + \beta_1) = \sin z_1 \sin z'_1 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(D - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(D + \beta) = \sin z \sin z' \sin^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Divisons membre à membre; il vient

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(D - \beta)\sin\tfrac{1}{2}(D + \beta) &= \sin^2\tfrac{1}{2}D - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \\ &= \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1}\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(D_1 + \beta_1).\end{aligned}$$

On introduit un angle auxiliaire φ en posant

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{\sin z \sin z'}{\sin z_1 \sin z'_1}\sin\tfrac{1}{2}(D_1 - \beta_1)\sin\tfrac{1}{2}(D_1 + \beta_1),$$

et l'on a finalement

$$\sin\tfrac{1}{2}D = \sin\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{séc}\varphi.$$

C'est la formule de Borda. En voici l'application à l'exemple suivant :

1880, mai 12, par $L = 21^h$, $\lambda = 45^\circ$, à 6^h temps moyen du navire, la distance des bords du Soleil et de la Lune était de $38^\circ 11' 37''$. La mesure des distances zénithales apparentes a donné

$z_1 = 77°41'37''$, $z'_1 = 45°25'29''$. (bar. $0^m,76$; therm. $+10°$). Calculer la longitude.

Pour l'heure de Paris approchée, $H_p = 9^h$, la *Connaissance des Temps* donne

$$\tfrac{1}{2}\Delta = 15'51'',4, \quad \pi = 8'',86$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta' = 14'45'',1, \quad P = 54'2'',9$$

On en déduit les distances zénithales géocentriques :

Soleil.		Lune.	
	° ′ ″		° ′ ″
z_1........	77.41.37	z'_1........	45.25.29
p.........	− 8,6	p'.........	− 38.34,5 (1)
ρ.........	+ 4.21,5	ρ'.........	+ 59,2
z.........	77.45.50	z'.........	44.47.54

Calcul de la distance apparente des centres.

Dist. des bords.............	38.11,37
$\tfrac{1}{2}\Delta_1$ réfracté.................	15.47
$\tfrac{1}{2}\Delta'$ réfracté.................	14.55
D_1 distance des centres......	38.42.19

Formule de Borda.

	° ′ ″		° ′ ″
z_1.............	77.41.37	z.............	77.45.50
z'_1............	45.25.29	z'............	44.47.54
β_1.............	32.16. 8	β............	32.57.56
D_1............	38.42.19	$\tfrac{1}{2}\beta$...........	16.28.58
$D_1 - \beta_1$........	6.26.11	$\log\sin\tfrac{1}{2}\beta$......	9,4529009
$D_1 + \beta^1$........	70.58.27	$\log\sin^2\tfrac{1}{2}\beta$.....	8,9058018
$\tfrac{1}{2}(D_1 - \beta_1)$.....	3.13. 5,5		
$\tfrac{1}{2}(P_1 + \beta_1)$.....	35.29.13,5		

(1) C'est pour le calcul exact de cette parallaxe qu'il faut tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre (p. 288).

Formule de Borda.

$\log \sin z$	9,9900201		
$\log \sin z'$	9,8479510		
$C^t \log \sin z_1$	0,0100957		
$C^t \log \sin z'_1$	0,1473194		
	9,9953862		
$\log \sin \frac{1}{2}(D_1 - \beta_1)$	8,7492613	$\log \text{séc}\, \varphi$	0,0731501
$\log \sin \frac{1}{2}(D_1 + \beta_1)$	9,7638168	$\log \sin \frac{1}{2}\beta$	9,4529009
$C^t \log \sin^2 \frac{1}{2}\beta$	1,0951982	$\log \sin \frac{1}{2} D$	9,5260510
$\log \text{tang}^2 \varphi$	9,6026625	$\frac{1}{2}D$	19°.37'.11".2
$\log \text{tang}\, \varphi$	9,8013312	D	39°.14'.22".4
φ	32°19'46",1		

Interpolation.

C. d. T. à 9^h	39°.14'.27".0	$\log \frac{3^h}{\text{diff}}$	0,3465
Diff.	— 4,6		
H_p	$8^h.59^m.49^s,8$	$\log 4'',6$	0,6628
			1,0093
H	6. 0. 0	Nombre	$10^s,2$
L	20. 0.10		

Voyages d'exploration terrestre.

Les procédés sont ici les mêmes qu'en mer, ainsi que les instruments. A la rigueur il suffirait d'emporter un petit sextant avec une petite coupe presque plate de cuivre argenté et une petite fiole de mercure, une boussole de poche, un chronomètre de poche, un baromètre de poche, un ruban métrique et un carnet.

On voyage aussi par estime : le loch est remplacé par le temps employé à parcourir les distances avec une vitesse supposée constante et connue, celle de la marche au pas ou l'allure ordinaire des montures. La boussole donne les directions et permet de relever, de diverses stations, les points les plus remarquables en vue.

Le voyageur terrestre, comme le navigateur, détermine de temps en temps la colatitude en observant le Soleil à midi, ou quelque étoile à sa culmination pendant la nuit. Il détermine l'heure par une distance zénithale, et la longitude par une distance lunaire

ou, si la lunette de voyage est assez puissante, par les éclipses des satellites de Jupiter ou les occultations d'étoiles par la Lune.

On rectifiera de temps en temps la boussole en comparant l'azimut magnétique d'un point de l'horizon avec son azimut astronomique. Pour cela il suffira, si l'heure et la colatitude sont connues, de mesurer au sextant l'angle compris entre l'objet et le centre du Soleil, et de réduire cet angle à l'horizon.

Le baromètre donnera un nivellement, bien imparfait sans doute, faute d'observations correspondantes en un point connu; mais, si l'on voyage dans les pays chauds, où les variations de la pression atmosphérique ne sont pas aussi marquées que chez nous, l'erreur ne sera pas considérable, surtout si l'on a soin d'éviter les moments de perturbation brusque de l'atmosphère et de noter les heures pour être en état de tenir compte de la variation diurne.

Enfin on consignera sur le journal de voyage, à côté des observations astronomiques, des directions suivies, etc., on notera, dis-je, les accidents de terrain et on y tracera autant que possible des croquis panoramiques de l'horizon.

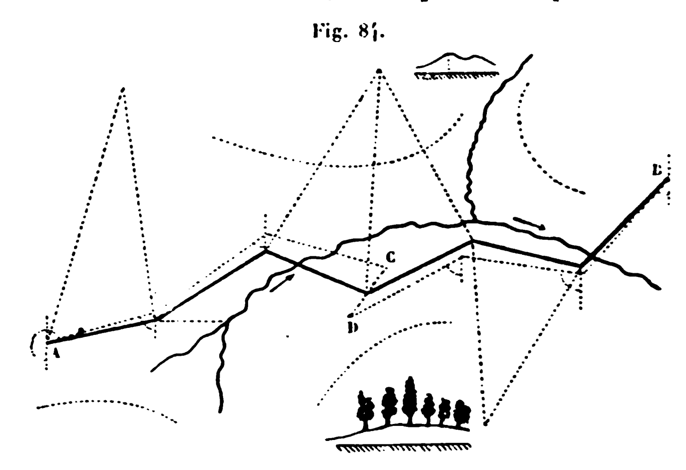
Le mieux serait sans doute de calculer immédiatement les observations, à l'aide de feuilles détachées de la *Connaissance des Temps* pour l'année courante et d'une petite Table de logarithmes. Cela n'est pas toujours possible; mais alors on s'astreindra à consigner sur le registre toutes les circonstances qui seront de nature à aider plus tard le calculateur.

Dans certains cas, lorsqu'on tient à bien déterminer certains points, on effectue au sextant une sorte de triangulation qu'il faut appuyer sur une base. On mesure la base avec des règles qu'on étalonne au moyen du ruban métrique. On a même réussi à s'en procurer d'assez longues, de 3000^m par exemple, par la vitesse du son. On fait tirer un coup de fusil à l'une des extrémités; à l'autre l'observateur note, sur sa montre à secondes, l'instant où il voit la flamme et l'instant où le son lui parvient.

Dans une excursion rapide, les points déterminés astronomiquement ne se présenteront sans doute qu'à de grandes distances. C'est par l'estime seulement, c'est-à-dire par des journées de marche et des directions observées à la boussole, que l'on devra remplir les intervalles. Chaque itinéraire partiel, partant d'un point connu A (*fig.* 84), comporte des erreurs assez fortes qui se décèlent lorsqu'on

le reporte sur le papier, par l'impossibilité de cadrer avec le point d'arrivée B, que je supposerai aussi bien déterminé que le premier. Il faut opérer là une sorte de compensation des erreurs. Le plus simple procédé consiste à diviser l'itinéraire AB en deux parties équivalentes comme exactitude, et à reporter chaque tronçon sur

Fig. 84.



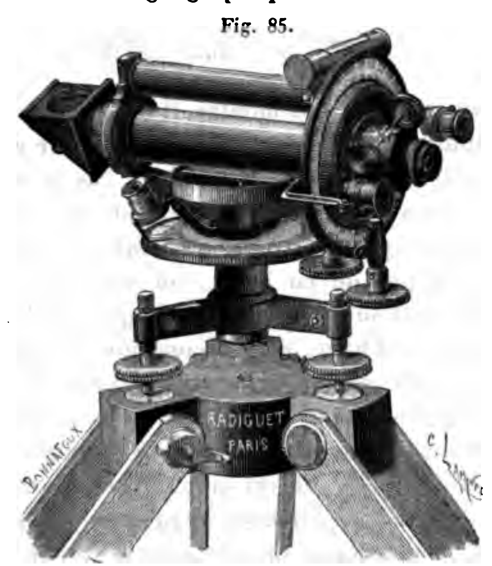
la carte, en partant des deux extrémités bien déterminées. On obtiendra ainsi, pour le milieu de la route, deux déterminations discordantes C, D, entre lesquelles on prendra un milieu. Il ne restera plus qu'à dessiner de nouveau les deux trajets de manière à les faire passer par ce troisième point, en altérant le moins possible les distances et les directions.

Si l'expédition dispose de plus de temps et de ressources, je conseillerai de substituer au sextant le petit théodolite de voyage de M. d'Abbadie (voir la *fig.* 85).

Avec un pareil instrument on peut entreprendre des opérations de Géodésie expéditive en tout semblables à celles qui ont permis à notre célèbre Voyageur de faire, à lui seul, en quelques années, une Carte remarquablement exacte de l'empire abyssinien. Au lieu d'un simple itinéraire dont les directions ne se relient que par des azimuts observés à la boussole, le théodolite permet de procéder par une véritable triangulation, accompagnée de la détermination des azimuts des côtés principaux et d'un nivellement géodésique. Les dimensions de l'ellipsoïde terrestre étant parfaitement connues, toute mesure de base, sauf pour les détails, serait superflue. Il

suffit d'avoir un certain nombre de points bien déterminés par leurs deux coordonnées géographiques.

Fig. 85.



L'emploi du théodolite est infiniment plus commode que celui du sextant. Les angles sont tout réduits à l'horizon; la direction du méridien et l'heure peuvent être obtenues par la méthode si avantageuse des hauteurs correspondantes; l'opérateur est autant que possible à l'abri des accidents de son chronomètre.

M. d'Abbadie fait même remarquer avec raison qu'il est très facile de se passer de la montre, qu'un accident de route peut mettre hors d'état de servir, et d'obtenir néanmoins une colatitude exacte par des observations circumméridiennes, pourvu qu'à chaque mesure de distance zénithale de l'astre observé on lise l'azimut correspondant sur le limbe horizontal. Supposons que l'origine des azimuts ait été déterminée d'avance par la méthode des hauteurs correspondantes. L'équation

$$\cos\delta = \cos\lambda \cos z - \sin\lambda \sin z \cos A$$

donnera la réduction au méridien par la formule exacte

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_m) = \frac{\sin\lambda \sin z}{\sin\left(\dfrac{z + z_m}{2} + \lambda\right)} \sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

ou, quand A est petit et exprimé en minutes d'arc, par la formule approchée

$$z - z_m = \frac{1}{2} \frac{\sin\lambda \sin z}{\sin\delta} \frac{A^2}{3438'}.$$

J'ajouterai que, même sans montre, il n'est pas impossible d'obtenir la longitude par l'azimut de la Lune ou par une éclipse de satellite de Jupiter. Considérons ces deux cas et supposons que l'observateur, après avoir disposé son théodolite, observe à l'aide d'une autre lunette portative plus puissante que celle de cet instrument une éclipse de ce genre, ou même une occultation d'étoile. Au moment où l'astre observé disparaît, il compte zéro: puis, mentalement ou à haute voix, il continue à compter en cadence 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce qu'il ait pointé la lunette du théodolite sur l'étoile choisie pour donner l'heure par sa distance zénithale. Il suffira de retrancher de cette heure le nombre de secondes écoulées entre les deux observations. Un observateur exercé parviendrait ainsi à compter assez régulièrement pour ne pas se tromper d'une demi-seconde sur une minute entière. L'instrument le plus commode dans un voyage terrestre est donc le petit théodolite. Nous recommanderons seulement à l'observateur d'abriter l'instrument, le niveau surtout, au moyen d'une boîte en carton blanc lorsqu'il opère sous les rayons du Soleil.

Le seul désavantage, celui de ne pouvoir mesurer les distances lunaires pour la détermination des longitudes, sera amplement compensé par l'emploi d'une autre méthode, celle des ascensions droites absolues qu'on obtiendra par l'observation des hauteurs correspondantes de la Lune, alternant avec celles de quelques étoiles voisines.

Le seul défaut de l'instrument de M. d'Abbadie consiste dans la suppression qu'il a cru devoir y faire des vis de rectification des niveaux. Il serait bon de les replacer, d'autant que ces vis-là, retenues par des ressorts antagonistes, ne risquent pas, comme les autres, de se desserrer et de se perdre en voyage.

TABLEAU DU SYSTÈME SOLAIRE

ET

TABLES NUMÉRIQUES.

TABLEAU DES PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DU SYSTÈME SOLAIRE.

I. — Grandes planètes.

Époque : 1er janvier 1850 (*).

NOM.	MOYEN mouvement diurne.	DURÉE de la révolution sidérale.	DISTANCE moyenne au Soleil.	EXCENTRICITÉ.
	"	j		
Mercure............	14732,4194	87,969258	0,3870987	0,2056048
Vénus..............	5767,6698	224,700787	0,7233322	0,0068433
La Terre...........	3548,1927	365,256374 (1)	1,0000000	0,0167701
Mars...............	1886,5184	686,979646	1,5236913	0,0932611
Jupiter............	299,1284	4332,588171	5,202800	0,0482519
Saturne............	120,4547	10759,236360	9,538861	0,0560713
Uranus	42,2310	30688,39036	19,18329	0,0463402
Neptune	21,5350	60181,11316	30,05508	0,0089646

NOM.	LONGITUDE du périhélie.	LONGITUDE moyenne au 1er janvie 1850 à midi moyen.	LONGITUDE nœud ascendant.	INCLINAISON.
	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "
Mercure............	75. 7.14	327.15.20	46.33. 9	7. 0. 8
Vénus..............	129.27.15	245.33.15	75.19.52	3.23.35
La Terre...........	100.21.22	100.46.44	0. 0. 0	0. 0. 0
Mars...............	333.17.54	83.40.31	48.23.53	1.51. 2
Jupiter............	11.54.58	160. 1.10	98.56.17	1.18.41
Saturne............	90. 6.38	14.52.28	112.20.53	2.29.40
Uranus.............	170.50. 7	29.17.51	73.13.54	0.46.20
Neptune............	45.59.43	334.33.29	130. 6.25	1.47. 2

NOM (2).	SENS de la rotation.	DURÉE de la rotation.	DIAMÈTRE.	MASSE.	DENSITÉ.	PESANTEUR à la surface.
		h m s				
Soleil....	Direct.	25. 0. 0	108,56	324000	0,25	27,63
Mercure .	Id.	0.24. 1	0,37	0,06	1,17	0,44
Vénus....	Id.	0.23.25	1,00	0,79	0,81	0,80
La Terre.	Id.	0.23.56	1	1	1	1
Mars. ...	Id.	0.24.37	0,53	0,11	0,71	0,38
Jupiter ..	Id.	0. 9.51	11,06	308,99	0,24	2,25
Saturne .	Id.	0.10.14	9,30	91,92	0,13	0,89
Uranus ..	Rétrograde.	?	3,86	13,52	0,23	0,91
Neptune .	Id.	?	3,80	22,53	0,41	1,56

(1) Durée de l'année tropique : 365j,2422166. — (2) Les nombres ce Tableau répondent à la parallaxe du Soleil 8",86, adoptée dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

(*) D'après les Tables de M. Le Verrier.

II. — Extrait du Catalogue des petites planètes circulant entre les orbites de Mars et de Jupiter.

NOM.	MOYEN mouvement diurne.	DURÉE de la révolution sidérale.	DISTANCE moyenne au Soleil.	EXCENTRICITÉ.
	"	j		
1 Cérès	770,7800	1681,414	2,767265	0,0763067
2 Pallas (1)	768,9858	1685,337	2,771568	0,2384718
3 Junon	814,0766	1591,988	2,668256	0,2578570
4 Vesta	977,6698	1325,601	2,361618	0,0884191
8 Flore (2)	1086,3310	1193,006	2,201387	0,1567041
80 Sapho	1019,7815	1270,861	2,296147	0,2001047
86 Sémélé	647,9641	2000,111	3,106732	0,2163682
96 Églé	666,2189	1945,306	3,049718	0,1404769
153 Hilda (3)	451,5802	2869,922	3,952281	0,1721206
183 Istria (4)	756,38	1713,43	2,80237	0,353011
217 Eudore	665,76	1946,63	3,05111	0,340769
220 »	952,89	1360,08	2,40239	0,294512

(1) La plus grande inclinaison. — (2) La plus petite distance au Soleil. — (3) La plus grande distance au Soleil. — (4) La plus grande excentricité. — (5) La plus courte distance à la Terre.

NOM.	ÉPOQUE.	LONGITUDE du périhélie.	LONGITUDE moyenne de l'époque.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1 Cérès	1874.980	149.37.49	103.25.3	80.46.39	10.37.10
2 Pallas	1874.832	121.53.20	67.35.18	172.46.53	34.41.31
3 Junon	1874.832	54.50.15	47.22.27	170.53.21	13.1.23
4 Vesta	1874.931	250.56.51	67.41.55	103.20.15	7.7.54
8 Flore	1848.000	32.54.28	68.49.5	110.17.49	5.53.8
80 Sapho	1865.920	355.18.26	61.38.34	218.44.9	8.36.46
86 Sémélé	1878,104	29.31.2	109.59.17	87.48.1	4.47.22
96 Églé	1873,175	163.9.59	130.14.47	322.49.44	16.6.47
153 Hilda	1880.351	285.46.59	234.30.48	228.19.42	7.54.43
183 Istria	1878.110	44.59.36	99.11.41	142.46.3	26.30.10
217 Eudore	1880.700	307.9.58	327.5.0	164.7.19	11.6.25
220 »	1881.412	322.34.39	270.21.33	260.36.27	6.45.8

III. — Satellites (¹).

SATELLITE DE LA TERRE.
Équinoxe et écliptique moyens du 0 janvier 1850.

	° ′ ″		j
L_0	122.59.55	Rotation	27,321661
N	146.13.40	Diamètre	0,273
ϖ	99.51.52	Masse	0,013
i	5. 8.48	Densité	0,615
e	0,054908	Pesanteur	0,174
a	60,273		
T	27,321661		

SATELLITES DE MARS.
Équinoxe et écliptique moyens de 1878,0. Époque 1877, août 28,0.

	PHOBOS.	DEIMOS.
	° ′	° ′
L	319.41,6	38.18,7
N	82.57,6	85.34,4
ϖ	4.13,9	357.58,4
i	26.17,2	25.47,2
e	0,03208	0,00574
a	2,771	6,921
T	0,318924	1,26243

SATELLITES DE JUPITER.
Équinoxe et écliptique moyens de 1850,0. Époque 1850, janvier 0,0.

	I.	II.	III.	IV.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
L	148.43.54	14.20. 6	37. 7.33	164.12.59
N	335.45. 0	336.55.16	341.30.23	344.56.46
ϖ	″	″	235.18.32	202.40.56
i	2. 8. 3	1.38.57	1.59.53	1.57. 0
e	″	″	0,001316	0,007243
a	5,933	9,439	15,057	26,486
T	1,7691378	3,5511811	7,1545531	16,6890185
m en parties de la masse de Jupiter..	0,000016877	0,000023227	0,000088437	0,000042475

SATELLITES DE SATURNE.

	MIMAS.	ENCELADE.	THÉTIS.	DIONÉE.
Équinoxe moyen	1857,0	1857,0	1857,0	1857,0
Époque	1857 janv. 0,0	1857 janv. 0,0	1857 janv. 0,0	1857 janv. 0,0
	°	° ′	° ′	° ′
L	208	300.13	280.28,5	114.39,3
N	″	″	167.37,3	167.37,3
ϖ	″	″	301.29.7	337.26,7
i	″	″	28.10,4	28.10,4
e	″	″	0,01086	0,00310
a	3,11	3,99	4,93	6,35
T	0,942424	1,370217	1,887804	2,736916

(¹) *a* est exprimé en rayons équatoriaux de la planète, T en jours.

SATELLITES DE SATURNE.

	RHÉA.	TITAN.	HYPÉRION.	JAPHET.
Équinoxe moyen....	1857,0	1857,0	1875,0	1857,0
Époque............	1857 janv. 0,6	1857 janv. 0,0	1875 août 24,0	1857 janv. 0,0
	° ′	° ′	° ′	° ′
L..................	288.12,5	299.34,0	161.10,3	78. 7,2
N..................	167.19,5	167.58,6	167.51,6	143. 1,3
ϖ..................	17.40,5	89. 8,3	357. 5,9	206.18,7
i..................	28. 8,1	27.36,6	28.10,3	18.37,9
e..................	0,00080	0,027937	0,125	0,028443
a..................	8,82	20,49	24,81	59,64
T..................	4,517493	15,945403	21,3113	79,32936

ANNEAUX DE SATURNE.

Époque 1880,0.

N = 167°55′6″, *i* = 28°10′17″, T = $10^h 32^m 15^s$.

Rayon intérieur du 1er anneau..........	1,482
Rayon extérieur »	1,916
Rayon intérieur du 2e anneau..........	1,962
Rayon extérieur »	2,229

SATELLITES D'URANUS (RÉTROGRADES).

Équinoxe et écliptique moyens de 1850,0. Époque 1871, décembre 31,0.

	ARIEL.	UMBRIEL.	TITANIA.	OBERON.
	° ′	° ′	° ′	° ′
L..................	153. 1	275. 9	20.26	308.21
N..................	167.20	164. 6	165.32	165.17
ϖ..................	196.26	158.33	93.33	149.46
i..................	97.58	98.21	97.47	97.54
e..................	0,020	0,010	0,00106	0,00383
a..................	7,72	10,76	17,65	23,60
T..................	2,520383	4,144181	8,705897	13,463269

SATELLITE DE NEPTUNE (RÉTROGRADE).

Équinoxe moyen de 1874,0. Époque 1874, janvier 0,0.

	° ′		
L..................	272. 4	*e*..................	0,0088
N..................	184.30	*a*..................	14,54
ϖ..................	184	T..................	5,876900
i..................	145. 7		

IV. — Comètes périodiques dont le retour a été observé.

Nos.	NOMS des comètes.	ÉPOQUE du passage au périhélie.		DISTANCE périhélie.	DISTANCE aphélie.	EXCENTRICITÉ.
			h m			
1	Encke......	1878. Mai 20....	10.23	0,333445	4,087937	0,8491669
2	Tempel.....	1878. Sept. 7...	5.54	1,339549	4,663725	0,5537271
3	Brorsen ...	1879. Mars 30..	2. 0	0,589892	5,612868	0,8097968
4	Winnecke ..	1880. Déc. 4....	8.15	0,830569	5,573387	0,7406075
5	Tempel.....	1879. Mai 6....	23.45	1,769381	4,820993	0,4630407
6	D'Arrest.. .	1877. Mai 10...	8. 8	1,318088	5,764689	0,6278048
7	Biéla (1) . .	1852. Sept. 23..	17.14	0,860161	6,167319	0,7552007
	Biéla (2) ...	1852. Sept. 22..	22.51	0,860592	6,196874	0,7551187
8	Faye	1881. Janv. 2[illegible]..	16. 7	1,738140	5,970090	0,5490171
9	Tuttle......	1871. Nov. 30..	22.30	1,03011	10,48294	0,8210540
10	Halley......	1835. Nov. 15...	0.15	0,58895	35,41121	0,9672807
	Halley (3)..	1910. Mai 24 ...	8.53	0,587098	35,223817	0,9617332

Nos.	LONGITUDE du périhélie.	LONGITUDE du nœud ascendant.	INCLINAISON.	ÉQUINOXE moyen.	DURÉE de la révolution sidérale.	SENS du mouvement.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″		ans	
1	158.19.41	334.39.10	13. 6.40	1878,1	3,287	D.
2	306. 7.42	121. 0.47	12.46. 2	1878,2	5,200	D.
3	116.15. 3	101.19.16	29.23.10	1878,2	5,462	D.
4	276.43.22	111.31. 5	11.16.45	1880,9	5,730	D.
5	238.11.30	78.45.37	9.46.32	1879,0	5,982	D.
6	319. 9.15	146. 9.28	15.43. 9	1877,7	6,644	D.
7	109. 5.20 (1)	245.49.34	12.33.28	1852,7	6,587	D.
	108.58.17 (2)	245.58.29	12.33.50		6,629	D.
8	50.48.47	209.35.25	11.19.40	1881,0	7,566	D.
9	116. 4.36	269.17.12	54.17. 0	1871,9	13,811	D.
10	304.31.42	55.10.15	17.44.53	1835,9	76,37	R.
	305.33.14	58.10.33	17.46.51	1910,4	74,5	R.

(1) 1er noyau, plus boréal.
(2) 2e noyau, plus austral.
(3) D'après les calculs de M. de Pontécoulant.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882.

N^{os}	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° °	° °	°		
1	371 av. J.-C.	Hiver...........	150-210	270-330	>30	très petite	R
2	137	29 avril........	230	220	20	1,01	R
3	69	Juillet..........	300-330	150-180	70	0,80	D
4	12	9 octobre.......	280	28	10	0,57	R
			′	′	′		
5	66 ap. J.-C.	14 janvier......	325. 0	32.40	40.30	0,445	R
6	141	29 mars........	251.55	12.50	17. 0	0,720	R
7	178	Comm. de sept..	290	190	18	0,5	D
8	218	6 avril.........	″	″	″	″	″
9	240	10 novembre....	271	189	44	0,372	D
10	295	Avril 1 ±......	″	″	″	″	″
11	451	3 juillet...	″	″	″	″	″
12	539	21 octobre......	313.30	58-238	10	0,341	D
13	565	12 juillet... ...	84	159	61	0,77	R
14	568	29 août.........	318.35	294.15	4. 8	0,907	D
15	574	7 avril.........	143.39	128.17	46.31	0,963	D
16	760	12 juin.........	″	″	″	″	″
17	770	7 juin....... ..	357. 7	90.59	61.49	0,642	R
18	837	1 mars.........	289. 3	206.35	10-12	0,580	R
19	961	30 décembre....	268. 3	350.35	79.33	0,552	R
20	989	12 septembre....	264	84	17	0,568	R
21	1006	22 mars........	304-305	38	17.30	0,583	R
22	1066	1 avril...	264.55′	25.50	17. 0	0,720	R
23	1092	15 février.......	156.20	125.40	28.55	0,928	D
24	1097 I	22 septembre...	332.30	207.30	73.30	0,738	D
25	1145	19 avril........	″	″	″	″	″
26	1231	30 janvier.... .	134.48	13.30	6. 5	0,948	D
27	1264	20 juillet.......	300.29	140.55	16.29	0,825	D
28	1299	31 mars..	3.20	107. 8	68.57	0,318	R
29	1301 I	24 octobre......	312	138	13	0,64	R
30	1337 I	15 juin.........	2.20	93. 1	40.28	0,828	R
31	1351	26 novembre....	69	indéterm	indéterm	1,0	D
32	1362 I	11 mars...... .	219	249	21	0,456	R
33	1366	13 octobre......	66	112	6	0,958	D
34	1378	9 novembre	299.31	47.17	17.56	0,583	R
35	1385	16 octobre......	101.47	268.31	52.15	0,774	R

1, peut-être identique avec comète 1843 I. — 4, 5, 6, 8, 10, 11, 16, 20, 22, 25, 29, probablement des apparitions de la comète de Halley. — 34, apparition de la comète de Halley.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882.** (Suite.)

N°s	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
36	1433	5 novembre.....	262. 1	110. 9	77.14	0,329	R
37	1449	9 décembre.....	60	143	75.30	0,15	D
38	1456	9 juin..........	301. 0	48.30	17.56	0,586	R
39	1457	4 septembre....	92.50	256. 5	20.20	2,103	D
40	1462	6 août..........	196	25	25	0,31	R
41	1468 II	7 octobre.......	356. 3	61.15	44.19	0,853	R
42	1472	28 février.......	48. 3	207.32	1.55	0,565	R
43	1490	24 décembre....	58.40	288.45	51.37	0,738	D
44	1491	5 janvier	113	268	75	0,755	R
45	1499	7 septembre	0	326.30	21	0,954	D
46	1500	17 mai	290	310	75	1,4	R
47	1506	4 septembre	250.37	132.50	45. 1	0,386	R
48	1531	25 août.........	301.39	49.25	17.56	0,5670	R
49	1532	20 octobre......	135.44	119. 8	42.27	0,6125	D
50	1533	15 juin........	217.40	299.19	28.14	0,4882	R
		17 juin.........	104.12	125.44	35.49	0,2028	D
51	1556	22 avril	274.15	175.26	30.12	0,5049	D
52	1558	11 août...	329.49	332.36	73.29	0,5773	R
53	1577	27 octobre......	129.42	25.20	75.10	0,1775	R
54	1580	29 novembre....	108.27	19. 7	64.34	0,6023	D
55	1582	6 mai	256.15	229.18	60.47	0,1683	R
56	1585	8 octobre.......	9.15	37.44	6. 5	1,0954	D
57	1590	8 février........	217.57	165.37	29.29	0,5677	R
58	1593	19 juillet	176.19	164.15	87.58	0,0891	D
59	1596	25 juillet	270.55	332.21	51.58	0,5672	R
60	1607	27 octobre	300.47	48.14	17. 6	0,5842	R
61	1618 I	17 août.........	318.20	293.25	21.28	0,5130	D
62	1618 II	8 novembre.....	3. 5	75.44	37.12	0,3895	D
63	1652	13 novembre....	28.19	88.10	79.28	0,8475	D
64	1661	27 janvier	115 16	81.54	33. 1	0,4427	D
65	1664	4 décembre.....	130.43	81.16	21.18	1,0255	R
66	1665	24 avril	71.54	228. 2	76. 5	0,1065	R
67	1668	25 février.......	40. 9	193.26	27. 7	0,2511	D
		29 février.......	277. 2	357.17	35.58	0,0047	R
68	1672	1 mars.........	46.59	297.30	83.22	0,6974	D
69	1677	6 mai..........	137.37	236.49	79. 3	0,2806	R

43, 44, les éléments peuvent se rapporter à la même comète. — 48, 60, comète de Halley. — 50, orbite fort incertaine. — 67, orbite fort incertaine; pourrait être identique avec 1882 II ou avec 1843 I, 1880 II.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement
			° ′	° ′	° ′		
70	1678	18 août........	322.48	163.20	2.52	1,1453	D
71	1680	18 décembre....	262.49	272. 9	60.40	0,0062	D
72	1682	15 septembre...	301.56	51.11	17.45	0,5829	R
73	1683	14 juillet.......	86.31	173.18	83.48	0,5534	R
74	1684	8 juin...........	238.52	268.15	65.49	0,9601	D
75	1686	17 septembre...	77. 0	350.35	31.22	0,3250	D
76	1689	29 novembre....	269.41	90.25	59. 5	0,0189	R
77	1695	10 novembre....	60	216	22	0,8435	D
78	1698	19 octobre......	270.51	267.44	11.46	0,6913	R
79	1699 I	13 janvier......	212.31	321.46	69.20	0,7440	R
80	1701	17 octobre......	133.41	298.41	41.39	0,5926	R
81	1702 I	14 mars........	138.47	188.59	4.25	0,6468	D
82	1706	30 janvier......	72.29	13.12	55.14	0,4258	D
83	1707	12 décembre....	79.55	52.47	88.36	0,8597	D
84	1718	15 janvier......	121.40	127.55	31. 8	1,0254	R
85	1723	28 septembre...	42.53	14.14	50. 0	0,9988	R
86	1729	13 juin..........	320.28	310.38	77. 5	4,0431	D
87	1737 I	30 janvier......	325.55	226.22	18.21	0,2228	D
88	1737 II	8 juin...........	262.37	123.54	39.14	0,8670	D
89	1739	17 juin..........	102.39	207.25	55.43	0,6736	R
90	1742 I	8 février........	217.35	185.38	66.59	0,7657	R
91	1743 I	8 janvier.......	93.20	86.54	1.54	0,8615	D
92	1743 II	21 septembre...	247. 0	6. 2	45.37	0,5230	R
93	1744	1 mars.........	197.13	45.45	47. 9	0,2221	D
94	1746	15 février.......	140. 0	335. 0	6. 0	0,95	D
95	1747	3 mars.........	277. 2	147.19	79. 6	2,1985	R
96	1748 I	29 avril.........	215.23	232.52	85.28	0,8404	R
97	1748 II	19 juin..........	278.47	33. 8	67. 3	0,6253	D
98	1748 III	21 avril.........	»	296	76	0,500	R
99	1757	21 octobre......	122.58	214.13	12.50	0,3375	D
100	1758	11 juin..........	267.38	230.50	68.19	0,2153	D
101	1759 I	13 mars.......	303.10	53.50	17.37	0,5845	R
102	1759 II	27 novembre....	53.24	139.39	78.59	0,7985	D
103	1759 III	17 décembre....	138.25	79.51	4.52	0,9660	R
104	1762	28 mai..........	104. 2	348.33	85.38	1,0090	D
105	1763	2 novembre.....	84.59	356.24	72.32	0,4983	D

70, identique avec comète de Vico. — 72, comète de Halley. — 77, peut-être identique avec comète 1843 I, 1880 II ou avec 1882 II. — 86, la plus grande distance périhélie connue. — 91, peut-être identique avec 1819 IV, période 6,73 ans. — 98, orbite fort incertaine. — 101, 1er retour prédit de la comète de Halley. — 71, 73, 105, orbites elliptiques.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882.** (Suite.)

N°s	ANNÉE de l'apparition	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
106	1764	13 février.......	15.15	120. 5	52.54	0,5552	R
107	1766 I	17 février.......	143.15	244.11	40.50	0,5053	R
108	1766 II	27 avril	251.13	74.11	8. 2	0,3990	D
109	1769	8 octobre.......	144.11	175. 4	40.46	0,1228	D
110	1770 I	14 août.........	356.17	131.59	1.34	0,6743	D
111	1770 II	22 novembre....	208.23	108.42	31.26	0,5282	R
112	1771	19 avril	104. 3	27.52	11.15	0,9034	D
113	1772	17 février.......	110.19	257.16	17. 3	0,9860	D
114	1773	6 septembre....	75.11	121. 5	61.14	1,1269	D
115	1774	16 août.........	317.28	180.45	83.20	1,4329	D
116	1779	4 janvier......	87.14	25. 4	32.31	0,7132	D
117	1780 I	1 octobre......	246.36	123.41	54.23	0,0963	R
118	1780 II	29 novembre....	246.52	141. 1	72. 3	0,5153	R
119	1781 I	7 juillet......	239.11	83. 1	81.43	0,7758	D
120	1781 II	30 novembre..	16. 3	77.23	27.13	0,9610	R
121	1783	20 novembre....	50.17	55.40	45. 7	1,4593	D
122	1784 I	21 janvier......	80.44	56.49	51. 9	0,7079	R
123	1784 II	10 mars........	137	35	84	0,637	D
124	1785 I	27 janvier......	109.52	264.12	70.14	1,1434	D
125	1785 II	8 avril........	297.30	64.34	87.32	0,4273	R
126	1786 I	31 janvier......	156.38	334. 8	13.36	0,3348	D
127	1786 II	8 juillet........	159.26	194.23	50.54	0,4101	D
128	1787	11 mai...... ..	7.44	106.52	48.16	0,3489	R
129	1788 I	10 novembre....	99. 8	156.57	12.28	1,0630	R
130	1788 II	20 novembre....	22.50	352.24	64.30	0,7573	D
131	1790 I	15 janvier......	60.15	176.12	31.54	0,7581	R
132	1790 II	28 janvier......	111.45	267. 9	56.58	1,0633	D
133	1790 III	21 mai.........	273.43	34.11	63.52	0,7980	R
134	1792 I	14 janvier... ..	36.30	190.46	39.47	1,2930	R
135	1792 II	27 décembre....	135.59	283.15	49. 2	0,9663	R
136	1793 I	5 novembre.....	228.42	108.29	60.21	0,4034	R
137	1793 II	20 novembre....	71.54	2. 0	51.31	1,4951	D
138	1795	21 décembre....	156.41	334.39	13.42	0,3344	D
139	1796	3 avril.........	192.44	17. 2	64.55	1,5781	R
140	1797	9 juillet.........	49.27	329.16	50.41	0,5266	R

108, période 5,03 ans. — Peut-être identique avec comète de Winnecke de 5,5 ans. — 110, la célèbre comète de Lexell. — 113, 1ère apparition connue de la comète de Biéla. — 121, période 5,9 ans. — 109, 117, orbites elliptiques. — 112, 15, orbites peut-être hyperboliques. 123, comète de d'Angos, très incertaine. 26, apparition de la comète d'Encke. 32, 1re apparition de la comète de Tuttle. — 136, période 422 ans. — 138, apparition de la comète d'Encke.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882.** (Suite.)

N°s	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
141	1798 I	4 avril.........	104.59	122. 9	43.52	0,4848	D
142	1798 II	1 janvier 1799..	34.27	249.30	42.26	0,7795	R
143	1799 I	7 septembre....	3.40	99.33	50.56	0,8399	R
144	1799 II	26 décembre....	190.20	326.49	77. 2	0,6258	R
145	1801	9 août..........	182.41	42.28	20.45	0,2564	R
146	1802	10 septembre...	332. 9	310.16	57. 1	1,0941	D
147	1804	14 février......	148.54	176.50	56.44	1,0723	D
148	1805	22 novembre....	156.47	334.20	13.33	0,3404	D
149	1806 I	2 janvier.......	109.28	251.16	13.37	0,9071	D
150	1806 II	29 décembre...	97. 3	322.23	35. 3	1,0819	R
151	1807	19 septembre...	270.55	266.47	63.10	0,6461	D
152	1808 I	13 mai........	69.13	322.59	45.43	0,3899	R
153	1808 II	12 juillet.......	252.39	24.11	39.19	0,6080	R
154	1810	6 octobre.......	63. 9	308.53	62.46	0,9691	D
155	1811 I	12 septembre...	75. 1	140.25	73. 2	1,0354	R
156	1811 II	11 novembre....	47.27	93. 2	31.17	1,5821	D
157	1812	15 septembre...	92.19	253. 1	73.57	0,7771	D
158	1813 I	5 mars.........	69.56	60.48	21.14	0,6991	R
159	1813 II	19 mai...... ..	197.44	42.41	81. 2	1,2161	R
160	1815	26 avril........	149. 2	83.29	44.30	1,2128	D
161	1816	1 mars.........	267.36	323.15	43. 5	0,0485	D
162	1818 I	3 février........	76.18	256. 1	34.11	0,6959	D
163	1818 II	26 février.......	182.45	170.26	89.44	1,1978	D
164	1881 III	5 décembre.....	101.55	90. 0	63. 5	0,8551	R
165	1819 I	27 janvier.... .	156.59	334.33	13.37	0,3353	D
166	1819 II	28 juin..........	287. 6	273.43	80.45	0,3410	D
167	1819 III	19 juillet.......	274.41	113.11	10.43	0,7736	D
168	1819 IV	20 novembre....	67.19	77.14	9. 1	0,8925	D
169	1821	22 mars........	269.29	48.41	73.33	0,0918	R
170	1822 I	6 mai..........	192.44	177.27	53.37	0,5044	R
171	1822 II	24 mai.........	157.12	334.25	13.20	0,3460	D
172	1822 III	17 juillet.......	218.33	97.40	38.13	0,8367	R
173	1822 IV	24 octobre......	271.40	90.45	52.39	1,1451	R
174	1823	9 décembre.....	274.34	303. 3	76.12	0,2265	R
175	1824 I	12 juillet.......	260.17	234.19		0,5819	R

148, 165, apparitions de la comète d'Encke. — 171, sa première apparition prédite. — 149, apparition de la comète de Biéla. — 155, célèbre comète, orbite elliptique. — 156, période 875 ans. — 157, période 70,68 ans. — 150, période, 70 65 ans. — 164, pourrait être identique avec 1873 VII. — 167, 1re apparition de la comète de Winnecke, période 5,62 ans. — 168, période 4,81 ans. — 151, 173, orbites elliptiques.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)**

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLINAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
176	1824 II	29 septembre...	4.32	279.17	54.36	1,0498	D
177	1825 I	31 mai.........	273.5	20. 6	56.41	0,8891	R
178	1825 II	19 août.........	10.14	192.56	89.42	0,8834	D
179	1825 III	16 septembre...	157.15	334.27	13.21	0,3448	D
180	1825 IV	11 décembre....	318.47	215.43	33.33	1,2409	R
181	1826 I	18 mars........	109.49	251.27	13.34	0,9024	D
182	1826 II	22 avril........	116.59	197.37	40. 0	2,0079	D
183	1826 III	29 avril........	35.48	40.29	5.17	0,1881	R
184	1826 IV	9 octobre.......	57.48	44. 6	25.57	0,8528	D
185	1826 V	18 novembre....	315.30	235. 6	89.22	0,0269	R
186	1827 I	5 février.......	33.30	184.28	77.36	0,5065	R
187	1827 II	8 juin..........	297.32	318.10	43.39	0,8081	R
188	1827 III	12 septembre...	250.57	149.39	54. 5	0,1378	R
189	1829	10 janvier......	157.18	334.30	13.21	0,3455	D
190	1830 I	9 avril.........	212.11	206.22	21.16	0,9214	D
191	1830 II	28 décembre....	310.59	337.53	44.45	0,1259	R
192	1832 I	4 mai..........	157.21	334.32	13.22	0,3435	D
193	1832 II	26 septembre...	227.55	72.27	43.19	1,1835	R
194	1832 III	26 novembre....	110. 1	248.16	13.13	0,8790	D
195	1833	10 septembre...	222.57	323. 9	7.20	0,4588	D
196	1834	3 avril.........	276.34	226.49	5.57	0,5150	D
197	1835 I	28 mars........	207.43	58.20	9. 8	2,0413	R
198	1835 II	26 août.........	157.23	334.35	13.21	0,3444	D
199	1835 III	16 novembre....	304.32	55.10	17.45	0,5866	R
200	1838	19 décembre....	157.27	334.37	13.21	0,3440	D
201	1840 I	4 janvier.......	192.12	119.58	53. 6	0,6184	D
202	1840 II	13 mars........	80.18	236.49	59.13	1,2214	R
203	1840 III	3 avril.........	324.20	185. 4	79.51	0,7420	D
204	1840 IV	14 novembre....	22.32	248.56	57.57	1,4808	D
205	1842 I	12 avril........	157.29	334.39	13.20	0,3450	D
206	1842 II	16 décembre....	327.18	207.50	73.34	0,5044	R
207	1843 I	27 février.......	278.40	1.15	35.41	0,0055	R
208	1843 II	6 mai..........	281.30	157.15	52.45	1,6163	D
209	1843 III	17 octobre......	49.34	209.30	11.23	1,6922	D
210	1844 I	2 septembre....	342.31	63.50	2.55	1,1864	D

179, 189, 192, 198, 200, 205, retours de la comète d'Encke. — 181, retour de la comète de Biéla; 194, son 1er retour prédit. — 183, orbite fort incertaine. — 199, comète de Halley. — 204, période 344 ans. — 207, peut-être identique avec 1880. — 209, comète périodique de Faye. — 210, comète de Vico, période 5,47 ans. — 188, 202, orbites elliptiques. — 176, orbite peut-être hyperbolique.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLINAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement
			° ′	° ′	° ′		
211	1844 II	17 octobre......	180.24	31.39	48.36	0,8553	R
212	1844 III	14 décembre....	296. 1	118.23	45.37	0,2513	D
213	1845 I	8 janvier.......	91.20	336.44	46.50	0,9052	D
214	1845 II	21 janvier......	192.33	347. 7	56.24	1,2547	D
215	1845 III	6 juin..........	262. 3	337.49	48.42	0,4016	R
216	1845 IV	10 août.........	157.44	334.20	13. 8	0,3381	D
217	1846 I	22 janvier......	89. 6	111. 8	47.26	1,4807	D
218	1846 II	11 février.	109. 3	245.54	12.35	0,8565	D
219	1846 III	25 février.......	116.28	102.41	30.56	0,6501	D
220	1846 IV	6 mars.........	90.27	77.34	85. 6	0.6637	D
221	1846 V	28 mai.........	82.33	161.19	57.36	1,3763	R
222	1846 VI	1 juin..........	240. 8	260.29	30.24	1,5286	R
223	1846 VII	6 juin..........	162. 1	261.51	29.19	0,6334	R
224	1846 VIII	30 octobre......	98.36	4.41	49.41	0,8306	D
225	1847 I	30 mars........	276. 2	21.42	48.40	0,0426	D
226	1847 II	5 juin..........	141.34	173.56	79.34	2,1161	R
227	1847 III	9 août..........	21.17	76.43	32.39	1,4847	R
228	1847 IV	9 août..........	246.45	338.17	83.26	1,7661	R
229	1847 V	10 septembre...	79.12	309.49	19. 8	0,4879	D
230	1847 VI	14 novembre ...	274.14	190.50	71.53	0,3292	R
231	1848 I	8 septembre....	310.35	211.32	84.25	0,3199	R
232	1848 II	26 novembre....	157.47	334.21	13. 9	0,3370	D
233	1849 I	19 janvier......	63.14	215.13	85. 3	0,9595	D
234	1849 II	27 mai.........	235.44	202.33	67. 9	1,1593	D
235	1849 III	8 juin..........	267. 6	30.32	66.55	0.8944	D
236	1850	24 juillet.......	273.25	92.53	68.11	1,0814	D
237	1850 II	19 octobre......	89.13	206. 0	40. 5	0,5656	D
238	1851 I	2 avril.........	49.42	209.31	11.22	1,7000	D
239	1851 II	9 juillet........	322.55	148.24	13.55	1,1734	D
240	1851 III	26 août.........	310.59	223.41	38. 9	0,9843	D
241	1851 IV	1 octobre.......	338.46	44.29	74. 1	0,1410	D
242	1852 I	15 mars........	157.51	334.23	13. 8	0,3375	D
243	1852 II	20 avril........	280. 1	317. 8	48.53	0,9050	R
244	1852 III	23 septembre...	109. 8	245.51	12.33	0,8606	D
245	1852 IV	13 octobre......	43.14	346.10	40.55	1,2500	D

215, peut-être identique avec 1596. — 216, 232, 242, retours de la comète d'Encke. — 2 8, retour de la comète de Biéla; 244, son dernier retour observé. — 219, comète de Brorsen. — 220, période 73 ans. — 222, période 12,8 ans. — 223, période 500 ans. — 229, période 75 ans. — 238, 1er retour prédit de la comète de Faye. — 239, comète de d'Arrest. — 245, période 60 ans. — 211, 217, 224, 227, 228, 235, 236, 240, orbites elliptiques.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en** 1882. (Suite.)

N°s	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouve-ment.
			° ′	° ′	° ′		
246	1853 I	24 février.......	153.43	69.34	20.15	1,0921	R
247	1853 II	10 mai	201.45	40.58	57.49	0,9086	R
248	1853 III	2 septembre	310.57	140.31	61.30	0,3070	D
249	1853 IV	17 octobre......	302.10	220. 3	60.59	0,1730	R
250	1854 I	4 janvier	56. 7	227. 3	66. 7	2,0447	R
251	1854 II	24 mars.........	213.48	315.27	82.23	0,2770	R
252	1854 III	22 juin	273. 5	347.40	71.19	0,6481	R
253	1854 IV	28 octobre......	94.24	324.29	40.55	0,7987	D
254	1854 V	16 décembre....	165. 9	238. 8	14. 9	1,3575	D
255	1855 I	5 février........	226.38	189.44	51.24	2,1935	R
256	1855 II	30 mai	237.42	260.19	23. 7	0,5668	R
257	1855 III	1 juillet	157.53	334.26	13. 8	0,3371	D
258	1855 IV	25 novembre....	86. 2	51.35	10.11	1,2323	R
259	1857 I	21 mars........	74.44	313. 9	87.56	0,7725	D
260	1857 II	29 mars..	115.46	101.45	29.49	0,6206	D
261	1857 III	18 juillet.......	249.36	23.41	58.58	0,3675	R
262	1857 IV	24 août........	21.47	200.49	32.46	0,7468	D
263	1857 V	1 octobre.......	250. 4	14.57	56. 3	0,5626	R
264	1857 VI	19 novembre....	44.13	139.19	37.49	1,0090	R
265	1857 VII	29 novembre....	323. 3	148.27	13.56	1,1704	D
266	1858 I	23 février.......	115.52	269. 3	54.24	1,0255	D
267	1858 II	2 mai	275.41	113.34	10 48	0,7689	D
268	1858 III	2 mai	195.43	171. 3	23.11	1,2090	D
269	1858 IV	5 juin	226. 6	324.58	80. 3	0,5443	R
270	1858 V	14 septembre ...	49.52	209.40	11.22	1,6948	D
271	1858 VI	30 septembre ...	36.13	165.19	63. 2	0,5785	R
272	1858 VII	13 octobre......	4.13	159.45	21.17	1,4270	R
273	1858 VIII	18 octobre......	157.57	334.29	13. 4	0,3407	D
274	1859	29 mai	75.21	357.21	83.32	0,2010	R
275	1860 I *a*	17 février.......	173.50	324. 4	79.40	1,1989	D
	1860 I *b*		173.45	324. 3	79.36	1,1982	D
276	1860 II	6 mars..	50. 5	8.53	48.13	1,3068	D
277	1860 III	16 juin.........	161.32	84.40	79.19	0,2929	D
278	1860 IV	28 septembre ...	111.59	104.14	28.14	0,9539	R
279	1861 I	3 juin..........	243.22	29.56	79.46	0,9207	D
280	1861 II	12 juin.........	249. 4	278.58	85.26	0,8224	D

247, période 785 ans. — 256, période 493 ans. — 257, 273, retours de la comète d'Encke. — 260, retour de la comète de Brorsen. — 262, période 235 ans. — 265, retour de la comète de d'Arrest. — 266, comète périodique de Tuttle. — 267, comète périodique de Winnecke. — 270, retour de la comète de Faye. — 271, grande comète de Donati. — 275, *a* et *b*, comète double. — 279, période 415,4 ans. — 280, période 419 ans. — 253, 258, 261, 263, 264, orbites elliptiques. — 278, orbite très incertaine.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLINAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
211	1844 II	17 octobre......	180.24	31.39	48.36	0,8553	R
212	1844 III	14 décembre....	296. 1	118.23	45.37	0,2513	D
213	1845 I	8 janvier.......	91.20	336.44	46.50	0,9052	D
214	1845 II	21 janvier......	192.33	347. 7	56.24	1,2547	D
215	1845 III	6 juin..........	262. 3	337.49	48.42	0,4016	R
216	1845 IV	10 août.........	157.44	334.20	13. 8	0,3381	D
217	1846 I	22 janvier......	89. 6	111. 8	47.26	1,4807	D
218	1846 II	11 février......	109. 3	245.54	12.35	0,8565	D
219	1846 III	25 février.......	116.28	102.41	30.56	0,6501	D
220	1846 IV	6 mars.........	90.27	77.34	85. 6	0.6637	D
221	1846 V	28 mai.........	82.33	161.19	57.36	1,3763	R
222	1846 VI	1 juin..........	240. 8	260.29	30.24	1,5286	R
223	1846 VII	6 juin..........	162. 1	261.51	29.19	0,6334	R
224	1846 VIII	30 octobre......	98.36	4.41	49.41	0,8306	D
225	1847 I	30 mars........	276. 2	21.42	48.40	0,0426	D
226	1847 II	5 juin..........	141.34	173.56	79.34	2,1161	R
227	1847 III	9 août..........	21.17	76.43	32.39	1,4847	R
228	1847 IV	9 août..........	246.45	338.17	83.26	1,7661	R
229	1847 V	10 septembre...	79.12	309.49	19. 8	0,4879	D
230	1847 VI	14 novembre ...	274.14	190.50	71.53	0,3292	R
231	1848 I	8 septembre....	310.35	211.32	84.25	0,3199	R
232	1848 II	26 novembre....	157.47	334.21	13. 9	0,3370	D
233	1849 I	19 janvier......	63.14	215.13	85. 3	0,9595	D
234	1849 II	27 mai.........	235.44	202.33	67. 9	1,1593	D
235	1849 III	8 juin..........	267. 6	30.32	66.55	0,8944	D
236	1850	24 juillet.......	273.25	92.53	68.11	1,0814	D
237	1850 II	19 octobre......	89.13	206. 0	40. 5	0,5656	D
238	1851 I	2 avril.........	49.42	209.31	11.22	1,7000	D
239	1851 II	9 juillet........	322.55	148.24	13.55	1,1734	D
240	1851 III	26 août.........	310.59	223.41	38. 9	0,9843	D
241	1851 IV	1 octobre.......	338.46	44.29	74. 1	0,1410	D
242	1852 I	15 mars........	157.51	334.23	13. 8	0,3375	D
243	1852 II	20 avril........	280. 1	317. 8	48.53	0,9050	R
244	1852 III	23 septembre...	109. 8	245.51	12.33	0,8606	D
245	1852 IV	13 octobre......	43.14	346.10	40.55	1,2500	D

215, peut-être identique avec 1596. — 216, 232, 242, retours de la comète d'Encke. — 2 8, retour de la comète de Biéla; 244, son dernier retour observé. — 2 9, comète de Brorsen. 220, période 73 ans. 22, période 12,8 ans. — 223, période 500 ans. — 229, période 75 ans. — 238, 1er retour prédit de la comète de Faye. — 239, comète de d'Arrest. — 245, période 60 ans. — 211, 217, 224, 227, 228, 235, 236, 240, orbites elliptiques.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
316	1871 IV	20 décembre....	264.30	147. 2	81.36	0,6945	R
317	1871 V	29 décembre....	153.13	334.34	13. 7	0,3329	D
318	1873 I	10 mai	237.58	78.43	9.46	1,7695	D
319	1873 II	25 juin	306. 5	120.57	12.45	1,3437	D
320	1873 III	18 juillet	50. 3	209.39	11.22	1,6826	D
321	1873 IV	11 septembre ...	36 47	230.35	84. 1	0,7940	R
322	1873 V	2 octobre.......	302.58	176.43	58.31	0,3849	R
323	1873 VI	10 octobre......	116. 3	101.13	29.25	0,5949	D
324	1873 VII	3 décembre.....	85.30	248.37	26.29	0,7754	D
325	1874 I	10 mars	299.48	30.18	58.53	0,0446	D
326	1874 II	14 mars	302.22	274. 7	31.35	0,8857	R
327	1874 III	9 juillet	271. 6	118.44	66.21	0,6758	D
328	1874 IV	18 juillet	5.26	215.51	34. 8	1,6876	D
329	1874 V	27 août.........	344. 8	251.30	41.50	0,9826	D
330	1874 VI	19 octobre......	265.41	281.58	80.47	0,5082	R
331	1875 I	11 mars	276.42	111.34	11.17	0,8290	D
332	1875 II	13 avril	158.17	334.37	13. 7	0,3329	D
333	1877 I	19 janvier	200. 5	187.15	27. 5	0,8074	R
334	1877 II	18 avril	253.29	316.37	58.51	0,9500	R
335	1877 III	27 avril	102.52	346. 4	77.10	1,0093	D
336	1877 IV	10 mai	319. 9	146. 9	15.43	1,3181	D
337	1877 V	27 juin	80.58	184.16	64.19	1,0718	R
338	1877 VI	11 septembre ...	107.38	250.59	77.42	1,5766	R
339	1878 I	20 mai.........	158.20	334.39	13. 7	0,3334	D
340	1878 II	21 juillet......	279.50	102.16	78.11	1,3920	D
341	1878 III	7 septembre	306. 8	121. 1	12.46	1,3395	D
342	1879 I	30 mars	116.15	101.19	29.23	0,8098	D
343	1879 II	28 avril	42.46	44.57	72.46	0,8720	R
344	1879 III	7 mai	238.12	78.46	9.47	1,7694	D
345	1879 IV	29 août.........	308.11	32.22	72.15	0,9916	R
346	1879 V	5 octobre.......	202.38	87.11	77. 8	0,9896	D
347	1880 I	27 janvier	278.14	335.54	36.58	0,0060	R
348	1880 II	2 juillet	112. 3	257.15	56.56	1,8140	R
349	1880 III	7 septembre	82.11	45.12	38. 6	0,3542	R

317, 332, 340, retours de la comète d'Encke. — 318, 344. retours de la comète de Tempel 1867. — 319, 341, 2e comète périodique de Tempel. — 320, retour de la comète de Faye. — 323, 342, retours de la comète de Brorsen. — 324, identique avec 1818 I. — 328, période 298,6 ans. — 331, retour de la comète de Winnecke. — 336, retour de la comète de d'Arrest. 347, grande comète, orbite elliptique. — 321, 327, 324, 329, 349 orbites ellipt.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882.** (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend.	INCLINAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
281	1861 III	7 décembre.....	173.31	145. 7	41.57	0,8391	R
282	1862 I	6 février........	158. 0	334.31	13. 5	0,3399	D
283	1862 II	22 juin..	299.20	326.33	7.54	0,9813	R
284	1862 III	23 août.........	344.41	137.27	66.26	0,9626	R
285	1862 IV	28 décembre....	125.10	355.45	42.23	0,8025	R
286	1863 I	3 février........	191.23	116.56	85.22	0,7947	D
287	1863 II	5 avril..........	247.15	251.16	67.22	1,0681	R
288	1863 III	21 avril	305.47	250.11	85.29	0,6288	D
289	1863 IV	9 novembre.....	94.43	97.29	78. 5	0,7066	D
290	1863 V	27 décembre.,..	59.13	304.58	63.35	0,7661	D
291	1863 VI	29 décembre....	183. 8	105. 2	83.19	1,3131	D
292	1864 I	28 juillet.......	190.10	175.11	44.56	0,6140	R
293	1864 II	16 août.......	304.13	95.12	1.52	0,9092	R
294	1864 III	11 octobre......	159.30	31.43	70.14	0,9338	R
295	1864 IV	23 décembre....	221.42	203.13	48.52	0,7709	D
296	1864 V	28 décembre....	162.22	340.53	17. 7	1,1145	R
297	1865 I	14 janvier......	141.15	243. 3	87.32	0,0260	R
298	1865 II	4 octobre.......	49.56	209.41	11.22	1,6822	D
299	1866 I	11 janvier......	60.28	231.26	17.18	0,9765	R
300	1867 I	20 janvier......	75.52	78.35	18.12	1,5725	D
301	1867 II	24 mai.........	236. 9	101.10	6.24	1,2870	D
302	1867 III	7 novembre.....	276.21	64.58	83.26	0,3304	R
303	1868 I	21 avril........	116. 2	101.14	29.22	0,5968	D
304	1868 II	26 juin.........	287. 7	53.40	48.11	0,5823	R
305	1868 III	15 septembre...	158.10	334.31	13. 6	0,3339	D
306	1869 I	11 juin.........	275.55	113.33	18.48	0.7815	D
307	1869 II	10 octobre......	123.24	311.29	68.23	1,2306	R
308	1869 III	21 novembre....	41.17	292.40	6.55	1,1026	D
309	1870 I	14 juillet.......	303.32	141.44	58.12	1,0087	R
310	1870 II	2 septembre....	17.49	12.56	80.34	1,8171	R
311	1870 III	23 septembre...	318.41	146.25	15.39	1,2803	D
312	1870 IV	20 décembre....	5.21	94.45	32.44	0,3892	R
313	1871 I	11 juin.........	141.50	279.19	87.36	0,6543	D
314	1871 II	27 juillet.......	115.36	211.55	78. 1	1,0759	R
315	1871 III	1 décembre.....	116. 5	169.17	54.17	1,0301	D

282, retour de la comète d'Encke. — 284, période 123 ans. — 290, les éléments ressemblent à ceux de 1810. — 298, retour de la comète de Faye. — 299, période 33 ans. — 300, période 33,6 ans. — 301, comète de Tempel. — 303, retour de la comète de Brorsen. — 306, retour de la comète de Winnecke (1819 III). — 308, comète périodique Tempel-Swift, période 5.5 ans. — 311, retour de la comète de d'Arrest. — 315, comète de Tuttle. — 291, 293, 313, orbites elliptiques.

V. — Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie.	LONGIT. du nœud ascend	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° '	° '	° '		
316	1871 IV	20 décembre....	264.30	147. 2	81.36	0,6945	R
317	1871 V	29 décembre....	153.13	334.34	13. 7	0,3329	D
318	1873 I	10 mai	237.58	78.43	9.46	1.7695	D
319	1873 II	25 juin	306. 5	120.57	12.45	1,3437	D
320	1873 III	18 juillet	50. 3	209.39	11.22	1,6826	D
321	1873 IV	11 septembre ...	36 47	230.35	84. 1	0,7940	R
322	1873 V	2 octobre	302.58	176.43	58.31	0,3849	R
323	1873 VI	10 octobre	116. 3	101.13	29.25	0,5949	D
324	1873 VII	3 décembre	85.30	248.37	26.29	0,7754	D
325	1874 I	10 mars	299.48	30.18	58.53	0,0446	D
326	1874 II	14 mars	302.22	274. 7	31.35	0,8857	R
327	1874 III	9 juillet	271. 6	118.44	66.21	0,6758	D
328	1874 IV	18 juillet	5.26	215.51	34. 8	1,6876	D
329	1874 V	27 août	344. 8	251.30	41.50	0,9826	D
330	1874 VI	19 octobre	265.41	281.58	80.47	0,5082	R
331	1875 I	11 mars	376.42	111.34	11.17	0,8290	D
332	1875 II	13 avril	158.17	334.37	13. 7	0,3329	D
333	1877 I	19 janvier	200. 5	187.15	27. 5	0,8074	R
334	1877 II	18 avril	253.29	316.37	58.51	0,9500	R
335	1877 III	27 avril	102.52	346. 4	77.10	1,0093	D
336	1877 IV	10 mai	319. 9	146. 9	15.43	1,3181	D
337	1877 V	27 juin	80.58	184.16	64.19	1,0718	R
338	1877 VI	11 septembre ...	107.38	250.59	77.42	1,5766	R
339	1878 I	20 mai	158.20	334.39	13. 7	0,3334	D
340	1878 II	21 juillet	279.50	102.16	78.11	1,3920	D
341	1878 III	7 septembre	306. 8	121. 1	12.46	1.3395	D
342	1879 I	30 mars	116.15	101.19	29.23	0,8098	D
343	1879 II	28 avril	42.46	44.57	72.46	0,8720	R
344	1879 III	7 mai	238.12	78.46	9.47	1,7694	D
345	1879 IV	29 août	308.11	32.22	72.15	0,9916	R
346	1879 V	5 octobre	202.38	87.11	77. 8	0,9896	D
347	1880 I	27 janvier	278.14	335.54	36.58	0,0060	R
348	1880 II	2 juillet	112. 3	257.15	56.56	1,8140	R
349	1880 III	7 septembre	82.11	45.12	38. 6	0,3542	R

317, 332, 340, retours de la comète d'Encke. — 318, 344. retours de la comète de Tempel 1867. — 319, 341, 2e comète périodique de Tempel. — 320, retour de la comète de Faye. — 323, 342, retours de la comète de Brorsen. — 324, identique avec 1818 I. — 328, période 298,6 ans. — 331, retour de la comète de Winnecke. — 336, retour de la comète de d'Arrest. 347, grande comète, orbite elliptique. — 321, 327, 324, 329, 349 orbites ellipt.

V. — **Catalogue des orbites des comètes observées jusqu'en 1882. (Suite.)**

Nos	ANNÉE de l'apparition.	PASSAGE au périhélie.	LONGIT. du périhélie	LONGIT. du nœud ascend.	INCLI-NAISON.	DISTANCE périhélie.	SENS du mouvement.
			° ′	° ′	° ′		
350	1880 IV	7 novembre.....	43. 5	296.51	5.23	1,0669	D
351	1880 V	9 novembre.....	331. 9	257.36	50.48	0,3867	R
352	1880 VI	10 novembre....	262.30	249.36	60.41	0,6741	D
353	1881 I	23 janvier......	50.49	209.35	11.20	1,7331	D
354	1881 II	20 mai.........	300.14	126.31	77.53	0,5905	D
355	1881 III	16 juin.........	265.13	270.58	62.26	0,7345	D
356	1881 IV	22 août.........	331. 1	97. 7	39.44	0,6337	R
357	1881 V	13 septembre...	18.34	65.54	6.51	0,7256	D
358	1881 VI	14 septembre...	267.51	274.12	67.12	0,4492	R
359	1881 VII	15 novembre...	158.30	334.34	12.53	0,3430	D
360	1881 VIII	20 novembre....	63.28	181.20	35.11	1,9260	R
361	1882 I	11 juin.........	53.55	204.55	73.47	0,0608	D
362	1882 II	17 septembre...	276.25	345.54	38. 5	0,0078	R
363	1882 III	24 septembre...	236.25	344.25	28.50	0,0093	R
364	1882 IV	13 novembre...	354.45	249. 7	83.49	0.9548	R

350, retour de la comète de Tempel-Swift. — 353, retour de la comète de Faye. — 357, période 8,8 ans. — 359, retour de la comète d'Encke. — 362, grande comète, orbite peut-être elliptique; 363, compagnonde la grande comète 1882, orbite très incertaine. — 355, orbite elliptique.

VI. — Principaux essaims d'étoiles filantes [1] provenant de la décomposition de comètes périodiques.

DATE de l'apparition.	COORDONNÉES du point radiant.		COMÈTE PÉRIODIQUE correspondante.
Janvier 2-3	$R = 238^{\circ}$	$\delta = 45^{\circ}$	
Avril 12-13	273	65	
Avril 19-23	267	55	I de 1861.
Id.	238	93	
Id.	225	38	
Id.	204	108	
Juillet 26-29	342	124	
Août 9-14 (Perséides)	43	33	III de 1862.
Id.	345	40	
Id.	294	38	
Id.	9	109	
Octobre 19-25	74	65	
Id.	95	75	
Id.	112	61	
Novembre 13-14 (Léonides).	148	66	I de 1866.
Id.	53	58	
Id.	279	34	
Novembre 27-29	25	45	Comète de Biéla.
Décembre 6-13	105	60	
Id.	149	49	

(1) D'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Tables pour le calcul des orbites des comètes.

Table I

pour transformer les heures, minutes et secondes en parties décimales du jour.

HEURES.	PARTIES DÉCIMALES.	HEURES.	PARTIES DÉCIMALES.	HEURES.	PARTIES DÉCIMALES.
1	0,04166	9	0,37500	17	0,70833
2	0,08333	10	0,41666	18	0,75000
3	0,12500	11	0,45833	19	0,79166
4	0,16666	12	0,50000	20	0,83333
5	0,20833	13	0,54166	21	0,87500
6	0,25000	14	0,58333	22	0,91666
7	0,29166	15	0,62500	23	0,95833
8	0,33333	16	0,66666	24	1,00000

MINUTES.	PARTIES DÉCIMALES.	MINUTES.	PARTIES DÉCIMALES.	MINUTES.	PARTIES DÉCIMALES.
1	0,000694	21	0,014583	41	0,028472
2	0,001388	22	0,015277	42	0,029166
3	0,002083	23	0,015972	43	0,029861
4	0,002777	24	0,016666	44	0,030555
5	0,003472	25	0,017361	45	0,031250
6	0,004166	26	0,018055	46	0,031944
7	0,004861	27	0,018750	47	0,032638
8	0,005555	28	0,019444	48	0,033333
9	0,006250	29	0,020138	49	0,034027
10	0,006944	30	0,020833	50	0,034722
11	0,007638	31	0,021527	51	0,035416
12	0,008333	32	0,022222	52	0,036111
13	0,009027	33	0,022916	53	0,036805
14	0,009722	34	0,023611	54	0,037500
15	0,010416	35	0,024305	55	0,038194
16	0,011111	36	0,025000	56	0,038888
17	0,011805	37	0,025694	57	0,039583
18	0,012500	38	0,026388	58	0,040277
19	0,013194	39	0,027083	59	0,040972
20	0,013888	40	0,027777	60	0,041666

SECONDES	PARTIES DÉCIMALES.	SECONDES	PARTIES DÉCIMALES.	SECONDES	PARTIES DÉCIMALES.
1	0,0000115740	21	0,0002430555	41	0,0004745370
2	0,0000231481	22	0,0002546296	42	0,0004861111
3	0,0000347222	23	0,0002662037	43	0,0004976851
4	0,0000462962	24	0,0002777777	44	0,0005092592
5	0,0000578703	25	0,0002893518	45	0,0005208333
6	0,0000694444	26	0,0003009259	46	0,0005324074
7	0,0000810185	27	0,0003125000	47	0,0005439814
8	0,0000925925	28	0,0003240740	48	0,0005555555
9	0,0001041666	29	0,0003356481	49	0,0005671296
10	0,0001157407	30	0,0003472222	50	0,0005787037
11	0,0001273148	31	0,0003587962	51	0,0005902777
12	0,0001388888	32	0,0003703703	52	0,0006018518
13	0,0001504629	33	0,0003819444	53	0,0006134259
14	0,0001620370	34	0,0003935185	54	0,0006250000
15	0,0001736111	35	0,0004050925	55	0,0006365740
16	0,0001851851	36	0,0004166666	56	0,0006481481
17	0,0001967592	37	0,0004282407	57	0,0006597222
18	0,0002083333	38	0,0004398148	58	0,0006712962
19	0,0002199074	39	0,0004513888	59	0,0006828703
20	0,0002314814	40	0,0004629629	60	0,0006944444

Nota. Ces fractions décimales sont périodiques : le dernier chiffre constitue seul la période pour les heures et minutes ; les trois derniers pour les secondes.

TABLE II

pour transformer les parties décimales du jour en heures, minutes et secondes.

DÉCIM.	H. M.	DÉCIM.	H. M. S.	DÉCIM.	M. S.	DÉCIM.	M. S.	DÉCIM.	SEC.
0,1	2.24	0,01	0.14.24	0,001	1.26,4	0,0001	0. 8,64	0,00001	0,864
2	4.48	02	0.28.48	002	2.52,8	0002	0.17,28	00002	1,728
3	7.12	03	0.43.12	003	4.19,2	0003	0.25,92	00003	2,592
4	9.36	04	0 57.36	004	5.45,6	0004	0.34,56	00004	3,456
5	12.00	05	1.12.00	005	7.12,0	0005	0.43,20	00005	4,320
6	14.24	06	1.26.24	006	8.38,4	0006	0.51,84	00006	5,184
7	16.48	07	1.40.48	007	10. 4,8	0007	1. 0,48	00007	6,048
8	19.12	08	1.55.12	008	11.31,2	0008	1. 9,12	00008	6,912
9	21.36	09	2.09.36	009	12.57,6	0009	1 17,76	00009	7,776

TABLE III.

Nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année jusqu'au commencement de chaque mois.

ANNÉE.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOUT.	SEPTEMBRE.	OCTOBRE.	NOVEMBRE.	DÉCEMBRE.
Comm..	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Bissext.	0	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

TABLE IV, D'ENCKE,

pour résoudre l'équation de Lambert.

η.	log ε.	1res différences	2es différences	η.	log ε.	1res différences	2es différences
0,00	0,00000 00	0 18	0 36	0,25	0,00115 23	9 60	0 41
0,01	00 18	0 54	0 36	0,26	124 83	10 01	0 41
0,02	00 72	0 90	0 36	0,27	134 84	10 41	0 40
0,03	01 62	1 27	0 37	0,28	145 25	10 83	0 42
0,04	02 89	1 63	0 36	0,29	156 08	11 25	0 42
0,05	04 52	2 00	0 37	0,30	0,00167 33	11 68	0 43
0,06	06 52	2 36	0 36	0,31	179 01	12 11	0 43
0,07	08 88	2 73	0 37	0,32	191 12	12 55	0 44
0,08	11 61	3 09	0 36	0,33	203 67	12 99	0 44
0,09	14 70	3 46	0 37	0,34	216 66	13 44	0 45
0,10	0,00018 16	3 83	0 37	0,35	230 10	13 89	0 45
0,11	21 99	4 19	0 36	0,36	243 99	14 35	0 46
0,12	26 18	4 56	0 37	0,37	258 34	14 81	0 46
0,13	30 74	4 94	0 38	0,38	273 15	15 28	0 47
0,14	35 68	5 31	0 37	0,39	288 43	15 77	0 49
0,15	40 99	5 69	0 38	0,40	0,00304 20	16 25	0 48
0,16	46 68	6 07	0 38	0,41	320 45	16 75	0 50
0,17	52 75	6 45	0 38	0,42	337 20	17 25	0 50
0,18	59 20	6 83	0 38	0,43	354 45	17 77	0 52
0,19	66 03	7 22	0 39	0,44	372 22	18 28	0 51
0,20	0,00073 25	7 61	0 39	0,45	390 50	18 81	0 53
0,21	080 86	8 00	0 39	0,46	409 31	19 36	0 55
0,22	088 86	8 39	0 39	0,47	428 67	19 91	0 55
0,23	097 25	8 79	0 40	0,48	448 58	20 48	0 57
0,24	106 04	9 19	0 40	0,49	469 06		0 57
0,25	115 23		0 41				

η.	log ε.	1res différences.	2es différences.
0,49	0,00469 06		0 57
		21 05	
0,50	0,00490 11		0 59
		21 64	
0,51	511 75		0 59
		22 23	
0,52	533 98		0 62
		22 85	
0,53	556 83		0 62
		23 47	
0,54	580 30		0 64
		24 11	
0,55	604 41		0 67
		24 78	
0,56	629 19		0 68
		25 46	
0,57	654 65		0 69
		26 15	
0,58	680 80		0 71
		26 86	
0,59	707 66		0 74
		27 60	
0,60	0,00735 26		0 75
		28 35	
0,61	763 61		0 78
		29 13	
0,62	792 74		0 81
		29 94	
0,63	822 68		0 83
		30 77	
0,64	853 45		0 86
		31 63	
0,65	885 08		0 88
		32 51	
0,66	917 59		0 93
		33 44	
0,67	951 03		0 95
		34 39	
0,68	985 42		1 00
		35 39	
0,69	1020 81		1 03
		36 42	
0,70	0,01057 23		1 08
		37 50	
0,71	1094 73		1 12
		38 62	
0,72	1133 35		1 18

η.	log ε.	1res différences.	2es différences.
0,72	0,01133 35		1 18
		39 80	
0,73	1173 15		1 24
		41 04	
0,74	1214 19		1 29
		42 33	
0,75	1256 52		1 37
		43 70	
0,76	1300 22		1 44
		45 14	
0,77	1345 36		1 52
		46 66	
0,78	1392 02		1 63
		48 29	
0,79	1440 31		1 72
		50 01	
0,80	0,01490 32		1 85
		51 86	
0,81	1542 18		1 99
		53 85	
0,82	1596 03		2 14
		55 99	
0,33	1652 02		2 32
		58 31	
0,84	1710 33		2 55
		60 86	
0,85	1771 19		2 81
		63 67	
0,86	1834 86		3 12
		66 79	
0,87	1901 65		3 51
		70 30	
0,88	1971 95		4 04
		74 34	
0,89	2046 29		4 66
		79 00	
0,90	0,02125 29		5 63
		84 63	
0,91	2209 92		7 05
		91 68	
0,92	2301 60		9 48
		101 16	
0,93	2402 76		15 27
		116 43	
0,94	2519 19		

TABLE V, DE BARKER
pour le calcul des orbites paraboliques.

v.	M.	DIFFÉR.
0° 5′	0.05454	5454
10	0.10908	5455
15	0.16363	5454
20	0.21817	5454
25	0.27271	5454
30	0.32725	5455
35	0.38180	5454
40	0.43634	5455
45	0.49089	5454
50	0.54543	5455
55	0.59998	5455
1. 0	0.65453	5455
5	0.70908	5455
10	0.76363	5456
15	0.81819	5455
20	0.87274	5456
25	0.92730	5456
30	0.98186	5456
35	1.03642	5456
40	1.09098	5457
45	1.14555	5457
50	1.20012	5457
55	1.25469	5457
2. 0	1.30926	5458
5	1.36384	5458
10	1.41842	5458
15	1.47300	5459
20	1.52759	5458
25	1.58217	5460
30	1.63677	5459
35	1.69136	5460
40	1.74596	5460
45	1.80056	5461
50	1.85517	5461
55	1.90978	5461
3. 0	1.96439	5462
5	2.01901	5462
10	2.07363	5463
15	2.12826	5463
20	2.18289	5464
25	2.23753	5464

v.	M.	DIFFÉR.
3°30′	2.29217	5465
35	2.34682	5465
40	2.40147	5465
45	2.45612	5466
50	2.51078	5467
55	2.56545	5467
4. 0	2.62012	5468
5	2.67480	5468
10	2.72948	5469
15	2.78417	5470
20	2.83887	5470
25	2.89357	5470
30	2.94827	5472
35	3.00299	5472
40	3.05771	5472
45	3.11243	5474
50	3.16717	5474
55	3.22191	5474
5. 0	3.27665	5475
5	3.33140	5476
10	3.38616	5477
15	3.44093	5478
20	3.49571	5478
25	3.55049	5479
30	3.60528	5480
35	3.66008	5480
40	3.71488	5481
45	3.76969	5483
50	3.82452	5482
55	3.87934	5484
6. 0	3.93418	5485
5	3.98903	5485
10	4.04388	5486
15	4.09874	5488
20	4.15362	5488
25	4.20850	5489
30	4.26339	5489
35	4.31828	5491
40	4.37319	5492
45	4.42811	5493
50	4.48304	5493
55	4.53797	5495

v.	M.	DIFFÉR.	v	M.	DIFFÉR.
° ′			° ′		
7. 0	4.59292	5495	11. 0	7.24400	5556
5	4.64787	5497	5	7.29956	5558
10	4.70284	5497	10	7.35514	5560
15	4.75781	5499	15	7.41074	5561
20	4.81280	5499	20	7.46635	5563
25	4.86779	5501	25	7.52198	5565
30	4.92280	5502	30	7.57763	5566
35	4.97782	5502	35	7.63329	5568
40	5.03284	5504	40	7.68897	5569
45	5.08788	5505	45	7.74466	5571
50	5.14293	5506	50	7.80037	5573
55	5.19799	5507	55	7.85610	5574
8. 0	5.25306	5508	12. 0	7.91184	5577
5	5.30814	5509	5	7.96761	5578
10	5.36323	5511	10	8.02339	5579
15	5.41834	5511	15	8.07918	5582
20	5.47345	5513	20	8.13500	5583
25	5.52858	5514	25	8.19083	5585
30	5.58372	5515	30	8.24668	5586
35	5.63887	5517	35	8.30254	5589
40	5.69404	3517	40	8.35843	5590
45	5.74921	5519	45	8.41433	5592
50	5.80440	5520	50	8.47025	5594
55	5.85960	5521	55	8.52619	5596
9. 0	5.91481	5523	13. 0	8.58215	5597
5	5.97004	5524	5	8.63812	5600
10	6.02528	5525	10	8.69412	5601
15	6.08053	5526	15	8.75013	5603
20	6.13579	5528	20	8.80616	5605
25	6.19107	5529	25	8.86221	5608
30	6.24636	5531	30	8.91829	5609
35	6.30167	5531	35	8.97438	5611
40	6.35698	5534	40	9.03049	5612
45	6.41232	5534	45	9.08661	5615
50	6.46766	5536	50	9.14276	5617
55	6.52302	5537	55	9.19893	5619
10. 0	6.57839	5539	14. 0	9.25512	5621
5	6.63378	5540	5	9.31133	5623
10	6.68918	5541	10	9.36756	5625
15	6.74459	5543	15	9.42381	5627
20	6.80002	5545	20	9.48008	5629
25	6.85547	5546	25	9.53637	5631
30	6.91093	5547	30	9.59268	5633
35	6.96640	5549	35	9.64901	5635
40	7.02189	5550	40	9.70536	5637
45	7.07739	5552	45	9.76173	5640
50	7.13291	5554	50	9.81813	5642
55	7.18845	5555	55	9.87455	5643

v.	M.	DIFFÉR.	v.	M.	DIFFÉR.
15° 0'	9.93098	5646	19° 0'	12.66785	5765
5	9.98744	5648	5	12.72550	5768
10	10.04392	5651	10	12.78318	5771
15	10.10043	5652	15	12.84089	5774
20	10.15695	5655	20	12.89863	5777
25	10.21350	5657	25	12.95640	5779
30	10.27007	5659	30	13.01419	5783
35	10.32666	5662	35	13.07202	5785
40	10.38328	5663	40	13.12987	5788
45	10.43991	5666	45	13.18775	5792
50	10.49657	5668	50	13.24567	5794
55	10.55325	5671	55	13.30361	5797
16. 0	10.60996	5673	20. 0	13.36158	5800
5	10.66669	5675	5	13.41958	5803
10	10.72344	5678	10	13.47761	5806
15	10.78022	5680	15	13.53567	5809
20	10.83702	5682	20	13.59376	5812
25	10.89384	5685	25	13.65188	5815
30	10.95069	5687	30	13.71003	5819
35	11.00756	5689	35	13,76822	5821
40	11.06445	5692	40	13.82643	5824
45	11.12137	5695	45	13.88467	5828
50	11.17832	5696	50	13.94295	5830
50	11.23528	5700	55	14.00125	5834
17. 0	11.29228	5701	21. 0	14.05959	5837
5	11.34929	5705	5	14.11796	5840
10	11.40634	5706	10	14.17636	2843
15	11.46340	5710	15	14.23479	5847
20	11.52050	5712	20	14.29326	5849
25	11.57762	5714	25	14.35175	5853
30	11.63476	5717	30	14.41028	5856
35	11.69193	5719	35	14.46884	5859
40	11.74912	5722	40	14.52743	5863
45	11.80634	5725	45	14.58606	5866
50	11.86359	5727	50	14.64472	5869
55	11.92086	5730	55	14.70341	5872
18. 0	11.97816	5733	22. 0	14.76213	5876
5	12.03549	5735	5	14.82089	5879
10	12.09284	5738	10	14.87968	5883
15	12.15022	5740	15	14.93851	5885
20	12.20762	5744	20	14.99736	5890
25	12.26506	5746	25	15.05626	5892
30	12.32252	5748	30	15.11518	5896
35	12.38000	5752	35	15.17414	5900
40	12.43752	5754	40	15.23314	5903
45	12.49506	5757	45	15.29217	5906
50	12.55263	5760	50	15.35123	5910
55	12.61023	5762	55	15.41033	5913

v.	M.	DIFFÉR.	v.	M.	DIFFÉR.
23° 0'	15.46946	5917	27° 0'	18.35185	6103
5	15.52863	5920	5	18.41288	6107
10	15.58783	5924	10	18.47395	6112
15	15.64707	5927	15	18.53507	6116
20	15.70634	5931	20	18.59623	6120
25	15.76565	5935	25	18.65743	6125
30	15.82500	5938	30	18.71868	6129
35	15.88438	5941	35	18.77997	6134
40	15 94379	5946	40	18.84131	6137
45	16.00325	5949	45	18.90268	6143
50	16.06274	5952	50	18.96411	6146
55	16.12226	5957	55	19.02557	6151
24. 0	16.18183	5960	28. 0	19.08708	6156
5	16.24143	5963	5	19.14864	6160
10	16.30106	5968	10	19.21024	6165
15	16.36074	5971	15	19.27189	6169
20	16.42045	5975	20	19.33358	6173
25	16.48020	5978	25	19.39531	6178
30	16.53998	5983	30	19.45709	6183
35	16.59981	5986	35	19.51892	6187
40	16.65967	5990	40	19.58079	6192
45	16.71957	5994	45	19.64271	6197
50	16.77951	5997	50	19.70468	6201
55	16.83948	6002	55	19.76669	6206
25. 0	16.89950	6005	29. 0	19.82875	6210
5	16.95955	6010	5	19.89085	6215
10	17.01965	6013	10	19.95300	6220
15	17.07978	6017	15	20.01520	6225
20	17.13995	6021	20	20.07745	6229
25	17.20016	6025	25	20.13974	6234
30	17.26041	6029	30	20.20208	6239
35	17.32070	6033	35	20.26447	6244
40	17.38103	6037	40	20.32691	6248
45	17.44140	6041	45	20.38939	6254
50	17.50181	6045	50	20.45193	6258
55	17.56226	6049	55	20.51451	6263
26. 0	17.62275	6053	30. 0	20.57714	6267
5	17.68328	6057	5	20.63981	6273
10	17.74385	6061	10	20.70254	6278
15	17.80446	6066	15	20.76532	6282
20	17.86512	6069	20	20.82814	6288
25	17.92581	6074	25	20.89102	6293
30	17.98655	6078	30	20.95395	6298
35	18.04733	6082	35	21.01693	6302
40	18.10815	6086	40	21.07995	6308
45	18.16901	6090	45	21.14303	6312
50	18.22991	6095	50	21.20615	6318
55	18.29086	6099	55	21.26933	6323

v.	M.	DIFFÉR.	v.	M.	DIFFÉR.
31° 0'	21.33256	6328	35° 0'	24.43103	6596
5	21.39584	6333	5	24.49699	6601
10	21.45917	6338	10	24.56300	6608
15	21.52255	6343	15	24.62908	6614
20	21.58598	6349	20	24.69522	6620
25	21.64947	6354	25	24.76142	6626
30	21.71301	6359	30	24.82768	6632
35	21.77660	6364	35	24.89400	6638
40	21.84024	6369	40	24.96038	6644
45	21.90393	6374	45	25.02682	6651
50	21.96767	6380	50	25.09333	6658
55	22.03147	6386	55	25.15991	6664
32. 0	22.09533	6390	36. 0	25.22655	6669
5	22.15923	6396	5	25.29324	6676
10	22.22319	6402	10	25.36000	6682
15	22.28721	6406	15	25.42682	6689
20	22.35127	6413	20	25.49371	6695
25	22.41540	6417	25	25.56066	6702
30	22.47957	6423	30	25.62768	6708
35	22.54380	6429	35	25.69476	6715
40	22.60809	6434	40	25.76191	6721
45	22.67243	6438	45	25.82912	6727
50	22.73681	6446	50	25.89639	6733
55	22.80127	6450	55	25.96372	6740
33. 0	22.86577	6456	37. 0	26.03112	6748
5	22.93033	6462	5	26.09860	6754
10	22.99495	6467	10	26.16614	6760
15	23.05962	6473	15	26.23374	6767
20	23.12435	6479	20	26.30141	6773
25	23.18914	6484	25	26.36914	6780
30	23.25398	6490	30	26.43694	6784
35	23.31888	6495	35	26.50478	6797
40	23.38383	6501	40	26.57275	6800
45	23.44884	6507	45	26.64075	6807
50	23.51391	6513	50	26.70882	6814
55	23.57904	6518	55	26.77696	6821
34. 0	23.64422	6524	38. 0	26.84517	6828
5	23.70946	6531	5	26.91345	6834
10	23.77477	6536	10	26.98179	6841
15	23.84013	6542	15	27.05020	6848
20	23.90555	6547	20	27.11868	6856
25	23.97102	6554	25	27.18724	6862
30	24.03656	6560	30	27.25586	6868
35	24.10216	6565	35	27.32454	6877
40	24.16781	6571	40	27.39331	6883
45	24.23352	6578	45	27.46214	6890
50	24.29930	6584	50	27.53104	6897
55	24.36514	6589	55	27.60001	6905

v.	M.	DIFFÉR.	v.	M / LOG M.	DIFFÉR.
39° 0′	27.66905	6912	43° 0′	31.07132	7282
5	27.73817	6919	5	31.14414	7290
10	27.80736	6925	10	31.21704	7300
15	27.87661	6933	15	31.29004	7307
20	27.94594	6940	20	31.36311	7316
25	28.01534	6947	25	31.43627	7325
30	28.08481	6955	30	31.50952	7332
35	28.15436	6963	35	31.58284	7341
40	28.22399	6968	40	31.65625	7350
45	28.29367	6976	45	31.72975	7359
50	28.36343	6984	50	31.80334	7367
55	28.43327	6992	55	31.87701	7376
40. 0	28.50319	6999	44. 0	31.95077	7385
5	28.57318	7005	5	32.02462	7393
10	28.64323	7013	10	32.09855	7401
15	28.71336	7022	15	32.17256	7411
20	28.78358	7029	20	32.24667	7420
25	28.85387	7035	25	32.32087	7428
30	28.92422	7044	30	32.39515	7437
35	28.99466	7051	35	32.46952	7446
40	29.06517	7059	40	32.54398	7455
45	29.13576	7066	45	32.61853	7464
50	29.20642	7074	50	32.69317	7473
55	29.27716	7082	55	32.76790	7482
41. 0	29.34798	7090	45. 0	32.84272	7490
5	29.41888	7097	5	1.5174284	9884
10	29.48985	7105	10	1.5184168	9873
15	29.56090	7112	15	1.5194041	9863
20	29.63202	7121	20	1.5203904	9852
25	29.70323	7128	25	1.5213756	9842
30	29.77451	7137	30	1.5223598	9831
35	29.84588	7144	35	1.5233429	9822
40	29.91732	7151	40	1.5243251	9811
45	29.98883	7160	45	1.5253062	9801
50	30.06043	7169	50	1.5262863	9791
55	30.13212	7176	55	1.5272654	9781
42. 0	30.20387	7184	46. 0	1.5282435	9771
5	30.27571	7193	5	1.5292206	9761
10	30.34764	7199	10	1.5301967	9752
15	30.41963	7209	15	1.5311719	9741
20	30.49172	7216	20	1.5321460	9732
25	30.56388	7224	25	1.5331192	9722
30	30.63612	7233	30	1.5340914	9713
35	30.70845	7241	35	1.5350627	9703
40	30.78086	7249	40	1.5360330	9694
45	30.85335	7257	45	1.5370024	9684
50	30.92592	7266	50	1.5379708	9675
55	30.99858	7274	55	1.5389383	9667

v.	Log M.	Differ.	v.	Log M.	Differ.
47° 0′	1.5399048	9657	51° 0′	1.5853031	9271
5	1.5408705	9647	5	1.5862302	9263
10	1.5418352	9637	10	1.5871565	9256
15	1.5427989	9629	15	1.5880821	9250
20	1.5437618	9620	20	1.5890071	9243
25	1.5447238	9611	25	1.5899314	9236
30	1.5456849	9601	30	1.5908550	9230
35	1.5466450	9593	35	1.5917780	9223
40	1.5476043	9584	40	1.5927003	9216
45	1.5485627	9575	45	1.5936219	9210
50	1.5495202	9567	50	1.5945429	9204
55	1.5504769	9557	55	1.5954633	9196
48. 0	1.5514326	9550	52. 0	1.5963829	9191
5	1.5523876	9540	5	1.5973020	9184
10	1.5533416	9532	10	1.5982204	9178
15	1.5542948	9524	15	1.5991382	9171
20	1.5552472	9515	20	1.6000553	9165
25	1.5561987	9506	25	1.6009718	9159
50	1.5571493	9498	30	1.6018877	9153
35	1.5580991	9491	35	1.6028030	9147
40	1.5590482	9481	40	1.6037177	9140
45	1.5599963	9474	45	1.6046317	9135
50	1.5609437	9465	50	1.6055452	9129
55	1.5618902	9458	55	1.6064581	9122
49. 0	1.5628360	9449	53. 0	1.6073703	9117
5	1.5637809	9441	5	1.6082820	9111
10	1.5647250	9434	10	1.6091931	9105
15	1.5656684	9425	15	1.6101036	9099
20	1.5666109	9418	20	1.6110135	9093
25	1.5675527	9409	25	1.6119228	9088
30	1.5684936	9402	30	1.6128316	9082
35	1.5694338	9395	35	1.6137398	9076
40	1.5703733	9386	40	1.6146474	9071
45	1.5713119	9380	45	1.6155545	9065
50	1.5722499	9371	50	1.6164610	9059
55	1.5731870	9364	55	1.6173669	9055
50. 0	1.5741234	9356	54. 0	1.6182724	9048
5	1.5750590	9349	5	1.6191772	9044
10	1.5759939	9342	10	1.6200816	9037
15	1.5769281	9334	15	1.6209853	9033
20	1.5778615	9327	20	1.6218886	9027
25	1.5787942	9320	25	1.6227913	9022
30	1.5797262	9313	30	1.6236935	9017
35	1.5806575	9305	35	1.6245952	9012
40	1.5815880	9299	40	1.6254964	9006
45	1.5825179	9291	45	1.6263970	9002
50	1.5834470	9284	50	1.6272972	8996
55	1.5843754	9277	55	1.6281968	8991

v.	LOG 𝔐.	DIFFÉR.	v.	LOG 𝔐.	DIFFÉR.
[illegible]	[illegible]	[illegible]	59. 0	1.6717331	8788
[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	1.6726119	8785
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	1.6734904	8782
[illegible]	[illegible]	[illegible]	15	1.6743686	8779
[illegible]	[illegible]	[illegible]	20	1.6752465	8775
[illegible]	[illegible]	[illegible]	25	1.6761240	8772
[illegible]	[illegible]	[illegible]	30	1.6770012	8769
[illegible]	[illegible]	[illegible]	35	1.6778781	8766
[illegible]	[illegible]	[illegible]	40	1.6787547	8763
[illegible]	[illegible]	[illegible]	45	1.6796310	8760
[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	1.6805070	8757
[illegible]	[illegible]	[illegible]	55	1.6813827	8754
[illegible]	[illegible]	[illegible]	60. 0	1.6822581	8751
[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	1.6831332	8748
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	1.6840080	8746
[illegible]	[illegible]	[illegible]	15	1.6848826	8742
[illegible]	[illegible]	[illegible]	20	1.6857568	8740
[illegible]	[illegible]	[illegible]	25	1.6866308	8736
[illegible]	[illegible]	[illegible]	30	1.6875044	8734
[illegible]	[illegible]	[illegible]	35	1.6883778	8732
[illegible]	[illegible]	[illegible]	40	1.6892510	8728
[illegible]	[illegible]	[illegible]	45	1.6901238	8726
[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	1.6909964	8724
[illegible]	[illegible]	[illegible]	55	1.6918688	8720
[illegible]	[illegible]	[illegible]	61. 0	1.6927408	8719
[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	1.6936127	8715
[illegible]	[illegible]	[illegible]	10	1.6944842	8713
[illegible]	[illegible]	[illegible]	15	1.6953555	8711
[illegible]	[illegible]	[illegible]	20	1.6962266	8708
[illegible]	[illegible]	[illegible]	25	1.6970974	8706
[illegible]	[illegible]	[illegible]	30	1.6979680	8703
[illegible]	[illegible]	[illegible]	35	1.6988383	8702
[illegible]	[illegible]	[illegible]	40	1.6997085	8698
[illegible]	[illegible]	[illegible]	45	1.7005783	8697
[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	1.7014480	8694
[illegible]	[illegible]	[illegible]	55	1.7023174	8692
[illegible] 0	[illegible]	[illegible]	62. 0	1.7031866	8690
5	[illegible]	[illegible]	5	1.7040556	8687
10	[illegible]	[illegible]	10	1.7049243	8686
15	[illegible]	[illegible]	15	1.7057929	8683
20	[illegible]	[illegible]	20	1.7066612	8681
25	[illegible]	[illegible]	25	1.7075293	8679
30	[illegible]	[illegible]	30	1.7083972	8678
35	[illegible]	[illegible]	35	1.7092650	8675
40	[illegible]	8801	40	1.7101325	8673
45	[illegible]	[illegible]	45	1.7109998	8671
50	[illegible]	[illegible]	50	1.7118669	8670
55	[illegible]	[illegible]	55	1.7127339	8667

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
63°. 0'	1.7136006	8666	67°. 0'	1.7550405	8610
5	1.7144672	8664	5	1.7559015	8610
10	1.7153336	8662	10	1.7567625	8610
15	1.7161998	8660	15	1.7576235	8609
20	1.7170658	8659	20	1.7584844	8609
25	1.7179317	8657	25	1.7593453	8609
30	1.7187974	8655	30	1.7602062	8608
35	1.7196629	8653	35	1.7610670	7608
40	1.7205282	8652	40	1.7619278	8607
45	1.7213934	8651	45	1.7627885	8608
50	1.7222585	8648	50	1.7636493	8607
55	1.7231233	8648	55	1.7645100	8607
64. 0	1.7239881	8646	68. 0	1.7653707	8607
5	1.7248527	8644	5	1.7662314	8606
10	1.7257171	8643	10	1.7670920	8607
15	1.7265814	8641	15	1.7679527	8606
20	1.7274455	8640	20	1.7688133	8607
25	1.7283095	8639	25	1.7696740	8606
30	1.7291734	8637	30	1.7705346	8606
35	1.7300371	8636	35	1.7713952	8607
40	1.7309007	8635	40	1.7722559	8606
45	1.7317642	8634	45	1.7731165	8606
50	1.7326276	8632	50	1.7739771	8607
55	1.7334908	8631	55	1.7748378	8607
65. 0	1.7343539	8630	69. 0	1.7756985	8606
5	1.7352169	8629	5	1.7765591	8607
10	1.7360798	8628	10	1.7774198	8608
15	1.7369426	8627	15	1.7782806	8607
20	1.7378053	8626	20	1.7791413	8608
25	1.7386679	8624	25	1.7800021	8608
30	1.7395303	8624	30	1.7808629	8608
35	1.7403927	8623	35	1.7817237	8608
40	1.7412550	8621	40	1.7825845	8609
45	1.7421171	8621	45	1.7834454	8610
50	1.7429792	8620	50	1.7843064	8610
55	1.7438412	8619	55	1.7851674	8610
66. 0	1.7447031	8619	70. 0	1.7860284	8610
5	1.7455650	8617	5	1.7868894	8612
10	1.7464267	8617	10	1.7877506	8611
15	1.7472884	8816	15	1.7886117	8613
20	1.7481500	8615	20	1.7894730	8612
25	1.7490115	8615	25	1.7903342	8614
30	1.7498730	8614	30	1.7911956	8614
35	1.7507344	8613	35	1.7920570	8614
40	1.7515957	8613	40	1.7929184	8616
45	1.7524570	8612	45	1.7937800	8616
50	1.7533182	8612	50	1.7946416	8617
55	1.7541794	8611	55	1.7955033	8617

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
71° 0'	1.7963650	8618	75° 0'	1.8378686	8686
5	1.7972268	8620	5	1.8387372	8688
10	1.7980888	8620	10	1.8396060	8691
15	1.7989508	8620	15	1.8404751	8692
20	1.7998128	8622	20	1.8413443	8695
25	1.8006750	8623	25	1.8422138	8696
30	1.8015373	8623	30	1.8430834	8699
35	1.8023996	8625	35	1.8439533	8701
40	1.8032621	8625	40	1.8448234	8703
45	1.8041246	8627	45	1.8456937	8706
50	1.8049873	8627	50	1.8465643	8707
55	1.8058500	8629	55	1.8474350	8710
72. 0	1.8067129	8630	76. 0	1.8483060	8713
5	1.8075759	8630	5	1.8491773	8714
10	1.8084389	8632	10	1.8500487	8717
15	1.8093021	8634	15	1.8509204	8720
20	1.8101655	8634	20	1.8517924	8722
25	1.8110289	8635	25	1.8526646	8724
30	1.8118924	8637	30	1.8535370	8727
35	1.8127561	8638	35	1.8544097	8729
40	1.8136199	8640	40	1.8552826	8732
45	1.8144839	8640	45	1.8561558	8735
50	1.8153479	8642	50	1.8570293	8737
55	1.8162121	8644	55	1.8579030	8739
73. 0	1.8170765	8645	77. 0	1.8587769	8743
5	1.8179410	8646	5	1.8596512	8744
10	1.8188056	8648	10	1.8605256	8748
15	1.8196704	8649	15	1.8614004	8750
20	1.8205353	8650	20	1.8622754	8753
25	1.8214003	8653	25	1.8631507	8756
30	1.8222656	8653	30	1.8640263	8759
35	1.8231309	8654	35	1.8649022	8761
40	1.8239965	8657	40	1.8657783	8764
45	1.8248622	8658	45	1.8666547	8767
50	1.8257280	3660	50	1.8675314	8770
55	1.8265940	3662	55	1.8684084	8773
74. 0	1.8274602	8664	78. 0	1.8692857	8776
5	1.8283266	8665	5	1.8701633	8779
10	1.8291931	8668	10	1.8710412	8782
15	1.8300599	8668	15	1.8719194	8785
20	1.8309267	8671	20	1.8727979	8787
25	1.8317938	8673	25	1.8736766	8791
30	1.8326611	8674	30	1.8745557	8794
35	1.8335285	8676	35	1.8754351	8797
40	1.8343961	8679	40	1.8763148	8801
45	1.8352640	8680	45	1.8771949	8803
50	1.8361320	8682	50	1.8780752	8807
55	1.8370002	8684	55	1.8789559	8810

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
79° 0'	1.8798369	8813	83° 0'	1.9225548	9000
5	1.8807182	8816	5	1.9234548	9004
10	1.8815998	8820	10	1.9243552	9010
15	1.8824818	8823	15	1.9252562	9013
20	1.8833641	8827	20	1.9261575	9018
25	1.8842468	8829	25	1.9270593	9023
30	1.8851297	8834	30	1.9279616	9028
35	1.8860131	8836	35	1.9288644	9032
40	1.8868967	8840	40	1.9297676	9037
45	1.8877807	8843	45	1.9306713	9042
50	1.8886651	8847	50	1.9315755	9047
55	1.8895498	8850	55	1.9324802	9051
80. 0	1.8904349	8854	84. 0	1.9333853	9057
5	1.8913203	8858	5	1.9342910	9061
10	1.8922061	8861	10	1.9351971	9066
15	1.8930922	8865	15	1.9361037	9071
20	1.8939787	8869	20	1.9370108	9076
25	1.8948656	8872	25	1.9379184	9080
30	1.8957528	8876	30	1.9388264	9086
35	1.8966404	8880	35	1.9397350	9091
40	1.8975284	8884	40	1.9406441	9096
45	1.8984168	8887	45	1.9415537	9101
50	1.8993055	8891	50	1.9424638	9106
55	1.9001946	8895	55	1.9433744	9112
81. 0	1.9010841	8899	85. 0	1.9442856	9116
5	1.9019740	8903	5	1.9451972	9122
10	1.9028643	8907	10	1.9461094	9127
15	1.9037550	8911	15	1.9470221	9132
20	1.9046461	8915	20	1.9479353	9137
25	1.9055376	8918	25	1.9488490	9143
30	1.9064294	8923	30	1.9497633	9148
35	1.9073217	8927	35	1.9506781	9153
40	1.9082144	8931	40	1.9515934	9159
45	1.9091075	8935	45	1.9525093	9164
50	1.9100010	8939	50	1.9534257	9170
55	1.9108949	8944	55	1.9543427	9175
82. 0	1.9117893	8947	86. 0	1.9552602	9181
5	1.9126840	8952	5	1.9561783	9186
10	1.9135792	8956	10	1.9570969	9191
15	1.9144748	8960	15	1.9580160	9198
20	1.9153708	8965	20	1.9589358	9203
25	1.9162673	8969	25	1.9598561	9208
30	1.9171642	8973	30	1.9607769	9214
35	1.9180615	8978	35	1.9616983	9220
40	1.9189593	8982	40	1.9626203	9226
45	1.9198575	8986	45	1.9635429	9231
50	1.9207561	8991	50	1.9644660	9237
55	1.9216552	8996	55	1.9653897	9243

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
87°. 0′	1.9663140	9249	91°. 0′	2.0114203	9563
5	1.9672389	9255	5	2.0123766	9571
10	1.9681644	9261	10	2.0133337	9578
15	1.9690905	9266	15	2.0142915	9585
20	1.9700171	9272	20	2.0152500	9593
25	1.9709443	9279	25	2.0162093	9600
30	1.9718722	9284	30	2.0171693	9607
35	1.9728006	9291	35	2.0181300	9615
40	1.9737297	9296	40	2.0190915	9623
45	1.9746593	9303	45	2.0200538	9630
50	1.9755896	9309	50	2.0210168	9637
55	1.9765205	9315	55	2.0219805	9645
88. 0	1.9774520	9321	92. 0	2.0229450	9653
5	1.9783841	9327	5	2.0239103	9661
10	1.9793168	9334	10	2.0248764	9668
15	1.9802502	9340	15	2.0258432	9676
20	1.9811842	9346	20	2.0268108	9683
25	1.9821188	9352	25	2.0277791	9692
30	1.9830540	9359	30	2.0287483	9699
35	1.9839899	9365	35	2.0297182	9707
40	1.9849264	9372	40	2.0306889	9715
45	1.9858636	9378	45	2.0316604	9723
50	1.9868014	9384	50	2.0326327	9731
55	1.9877398	9391	55	2.0336058	9739
89. 0	1.9886789	9398	93. 0	2.0345797	9746
5	1.9896187	9404	5	2.0355543	9755
10	1.9905591	9411	10	2.0365298	9763
15	1.9915002	9417	15	2.0375061	9771
20	1.9924419	9424	20	2.0384832	9779
25	1.9933843	9431	25	2.0394611	9788
30	1.9943274	9437	30	2.0404399	9795
35	1.9952711	9444	35	2.0414194	9804
40	1.9962155	9451	40	2.0423998	9812
45	1.9971606	9458	45	2.0433810	9820
50	1.9981064	9465	50	2.0443630	9829
55	1.9990529	9471	55	2.0453459	9837
90. 0	2.0000000	9478	94. 0	2.0463296	9845
5	2.0009478	9485	5	2.0473141	9854
10	2.0018963	9493	10	2.0482995	9862
15	2.0028456	9499	15	2.0492857	9871
20	2.0037955	9506	20	2.0502728	9880
25	2.0047461	9513	25	2.0512608	9888
30	2.0056974	9520	30	2.0522496	9896
35	2.0066494	9528	35	2.0532392	9905
40	2.0076022	9534	40	2.0542297	9914
45	2.0085556	9542	45	2.0552211	9922
50	2.0095098	9549	50	2.0562133	9932
55	2.0104647	9556	55	2.0572065	9940

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
95° 0'	2.0582005	9948	99° 0'	2.1070109	10412
5	2.0591953	9958	5	2.1080521	10423
10	2.0601911	9967	15	2.1090944	10433
15	2.0611878	9975	15	2.1101377	10444
20	2.0621853	9984	20	2.1111821	10454
25	2.0631837	9994	25	2.1122275	10466
30	2.0641831	10002	30	2.1132741	10476
35	2.0651833	10011	35	2.1143217	10487
40	2.0661844	10021	40	2.1153704	10497
45	2.0671865	10029	45	2.1164201	10509
50	2.0681894	10039	50	2.1174710	10519
55	2.0691933	10047	55	2.1185229	10530
96. 0	2.0701980	10058	100. 0	2.1195759	10542
5	2.0712038	10066	5	2.1206301	10552
10	2.0722104	10075	10	2.1216853	10563
15	2.0732179	10085	15	2.1227416	10574
20	2.0742264	10094	20	2.1237990	10586
25	2.0752358	10104	25	2.1248576	10597
30	2.0762462	10113	30	2.1259173	10607
35	2.0772575	10122	35	2.1269780	10620
40	2.0782697	10132	40	2.1280400	10630
45	2.0792829	10142	45	2.1291030	10642
50	2.0802971	10151	50	2.1301672	10653
55	2.0813122	10160	55	2 1312325	10664
97. 0	2.0823282	10171	101. 0	2.1322989	10676
5	2.0833453	10180	5	2.1333665	10687
10	2.0843633	10189	10	2.1344352	10699
15	2.0853822	10199	15	2.1355051	10711
20	2.0864021	10210	20	2.1365762	10722
25	2.0874231	10218	25	2.1376484	10733
30	2.0884449	10229	30	2.1387217	10746
35	2.0894678	10239	35	2.1397963	10757
40	2.0904917	10248	40	2.1408720	10769
45	2.0915165	10259	45	2.1419489	10780
50	2.0925424	10268	50	2.1430269	10793
55	2.0935692	10279	55	2.1441062	10804
98. 0	2.0945971	10289	102. 0	2.1451866	10816
5	2.0956260	10298	5	2.1462682	10828
10	2.0966558	10309	10	2.1473510	10841
15	2.0976867	10319	15	2.1484351	10852
20	2.0987186	10329	20	2.1495203	10864
25	2.0997515	10340	25	2.1506067	10877
30	2.1007855	10349	30	2.1516944	10889
35	2.1018204	10360	35	2.1527833	10901
40	2.1028564	10371	40	2.1538734	10913
45	2.1038935	10381	45	2.1549647	10925
50	2.1049316	10391	50	2.1560572	10938
55	2.1059707	10402	55	2.1571510	10950

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
103° 0′	2.1582460	10963	107° 0′	2.2123493	11611
5	2.1593423	10975	5	2.2135104	11626
10	2.1604398	10987	10	2.2146730	11641
15	2.1615385	11001	15	2.2158371	11656
20	2.1626386	11012	20	2.2170027	11670
25	2.1637398	11026	25	2.2181697	11685
30	2 1648424	11038	30	2.2193382	11700
35	2.1659462	11051	35	2.2205082	11715
40	2.1670513	11063	40	2.2216797	11731
45	2.1681576	11076	45	2.2228528	11745
50	2.1692652	11090	50	2.2240273	11760
55	2.1703742	11102	55	2.2252033	11775
104. 0	2.1714844	11115	108. 0	2.2263808	11791
5	2.1725959	11128	5	2.2275599	11806
10	2.1737087	11141	10	2.2287405	11821
15	2.1748228	11154	15	2.2299226	11837
20	2.1759382	11168	20	2.2311063	11852
25	2.1770550	11180	25	2.2322915	11867
30	2.1781730	11194	30	2.2334782	11883
35	2.1792924	11207	35	2.2346665	11898
40	2.1804131	11220	40	2.2358563	11915
45	2.1815351	11233	45	2.2370478	11929
50	2.1826584	11247	50	2.2382407	11946
55	2.1837831	11261	55	2.2394353	11961
105. 0	2.1849092	11274	109. 0	2.2406314	11977
5	2.1860366	11287	5	2.2418291	11993
10	2.1871653	11301	10	2.2430284	12009
15	2.1882954	11315	15	2.2442293	12025
20	2.1894269	11328	20	2.2454318	12041
25	2.1905597	11342	25	2.2466359	12057
30	2.1916939	11356	30	2.2478416	12073
35	2.1928295	11369	35	2.2490489	12089
40	2.1939664	11384	40	2.2502578	12106
45	2.1951048	11397	45	2.2514684	12122
50	2.1962445	11411	50	2.2526806	12138
55	2.1973856	11426	55	2.2538944	12155
106. 0	2.1985282	11439	110. 0	2.2551099	12171
5	2.1996721	11453	5	2.2563270	12188
10	2.2008174	11468	10	2.2575458	12204
15	2.2019642	11481	15	2.2587662	12221
20	2.2031123	11496	20	2.2599883	12237
25	2.2042619	11510	25	2.2612120	12254
30	2.2054129	11525	30	2.2624374	12271
35	2.2065654	11539	35	2.2636645	12288
40	2.2077193	11553	40	2.2648933	12305
45	2.2088746	11568	45	2.2661238	12322
50	2.2100314	11582	50	2.2673560	12339
55	2.2111896	11597	55	2.2685899	12356

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
111° 0′	2.2698255	12373	115° 0′	2.3312564	13266
5	2.2710628	12390	5	2.3325830	13285
10	2.2723018	12407	10	2.3339115	13306
15	2.2735425	12425	15	2.3352421	13326
20	2.2747850	12442	20	2.3365747	13346
25	2.2760292	12460	25	2.3379093	13367
30	2.2772752	12477	30	2.3392460	13387
35	2.2785229	12494	35	2.3405847	13408
40	2.2797723	12512	40	2.3419255	13428
45	2.2810235	12530	45	2.3432683	13449
50	2.2822765	12547	50	2.3446132	13469
55	2.2835312	12566	55	2.3459601	13491
112. 0	2.2847878	12583	116. 0	2.3473092	13511
5	2.2860461	12601	5	2.3486603	13533
10	2.2873062	12618	10	2.3500136	13553
15	2.2885680	12637	15	2.3513689	13574
20	2.2898317	12655	20	2.3527263	13596
25	2.2910972	12673	25	2.3540859	13617
30	2.2923645	12691	30	2.3554476	13638
35	2.2936336	12710	35	2.3568114	13659
40	2.2949046	12728	40	2.3581773	13681
45	2.2961774	12746	45	2.3595454	13703
50	2.2974520	12764	50	2.3609157	13724
55	2.2987284	12783	55	2.3622881	13745
113. 0	2.3000067	12802	117. 0	2.3636626	13768
5	2.3012869	12820	5	2.3650394	13789
10	2.3025689	12839	10	2.3664183	13811
15	2.3038528	12857	15	2.3677994	13833
20	2.3051385	12876	20	2.3691827	13855
25	2.3064261	12896	35	2.3705682	13877
30	2.3077157	12914	30	2.3719559	13900
35	2.3090071	12933	35	2.3733459	13921
40	2.3103004	12952	40	2.3747380	13944
45	2.3115956	12971	45	2.3761324	13966
50	2.3128927	12990	50	2.3775290	13989
55	2.3141917	13010	55	2.3789279	14011
114. 0	2.3154927	13029	118. 0	2.3803290	14034
5	2.3167956	13048	5	2.3817324	14056
10	2.3181004	13068	10	2.3831380	14080
15	2.3194072	13087	15	2.3845460	14102
20	2.3207159	13106	20	2.3859562	14125
25	2.3220265	13126	25	2.3873687	14148
30	2.3233391	13146	30	2.3887835	14171
35	2.3246537	13166	35	2.3902006	14194
40	2.3259703	13186	40	2.3916200	14217
45	2.3272889	13205	45	2.3930417	14241
50	2.3286094	13225	50	2.3944658	14264
55	2.3299319	13245	55	2.3958922	14288

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
119° 0′	2.3973210	14311	123° 0′	2.4688205	15539
5	2.3987521	14335	5	2.4703744	15567
10	2.4001856	14358	10	2.4719311	15595
15	2.4016214	14382	15	2.4734906	15623
20	2.4030596	14406	20	2.4750529	15651
25	2.4045002	14430	25	2.4766180	15679
30	2.4059432	14454	30	2.4781859	15707
35	2.4073886	14478	35	2.4797566	15735
40	2.4088364	14502	40	2.4813301	15764
45	2.4102866	14527	45	2.4829065	15793
50	2.4117393	14551	50	2.4844858	15821
55	2.4131944	14575	55	2.4860679	15850
120. 0	2.4146519	14600	124. 0	2.4876529	15879
5	2.4161119	14624	5	2.4892408	15907
10	2.4175743	11649	10	2.4908315	15937
15	2.4190392	14674	15	2.4924252	15966
20	2.4205066	14698	20	2.4940218	15995
25	2.4219764	14724	25	2.4956213	16025
30	2.4234488	14748	30	2.4972238	16054
35	2.4249236	14774	35	2.4988292	16083
40	2.4264010	14798	40	2.5004375	16113
45	2.4278808	14824	45	2.5020488	16143
50	2.4293632	14850	50	2.5036631	16173
55	2.4308482	14874	55	2.5052804	16202
121. 0	2.4323356	14901	125. 0	2.5069006	16233
5	2.4338257	14925	5	2.5085239	16263
10	2.4353182	14952	10	2.5101502	16293
15	2.4368134	14977	15	2.5117795	16324
20	2.4383111	15003	20	2.5134119	16354
25	2.4398114	15029	25	2.5150473	16384
30	2.4413143	15056	30	2.5166857	16416
35	2.4428199	15081	35	2.5183273	16446
40	2.4443280	15107	40	2.5199719	16477
45	2.4458387	15134	45	2.5216196	16508
50	2.4473521	15160	50	2.5232704	16539
55	2.4488681	15187	55	2.5249243	16570
122. 0	2.4503868	15213	126. 0	2.5265813	16602
5	2.4519081	15240	5	2.5282415	16633
10	2.4534321	15266	10	2.5299048	16665
15	2.4549587	15294	15	2.5315713	16697
20	2.4564881	15320	20	2.5332410	16728
25	2.4580201	15347	25	2.5349138	16760
30	2.4595548	15375	30	2.5365898	16792
35	2.4610923	15402	35	2.5382690	16824
40	2.4626325	15429	40	2.5399514	16857
45	2.4641754	15456	45	2.5416371	16889
50	2.4657210	15484	50	2.5433260	16921
55	2.4672694	15511	55	2.5450181	16954

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
° '			° '		
127. 0	2.5467135	16987	131. 0	2.6321622	18703
5	2.5484122	17019	5	2.6340325	18741
10	2.5501141	17053	10	2.6359066	18780
15	2.5518194	17085	15	2.6377846	18820
20	2.5535279	17119	20	2.6396666	18859
25	2.5552398	17151	25	2.6415525	18899
30	2.5569549	17186	30	2.6434424	18939
35	2.5586735	17218	35	2.6453363	18978
40	2.5603953	17253	40	2.6472341	19019
45	2.5621206	17286	45	2.6491360	19058
50	2.5638492	17320	50	2.6510418	19200
55	2.5655812	17354	55	2.6529518	19139
128. 0	2.5673166	17388	132. 0	2.6548657	19180
5	2.5690554	17423	5	2.6567837	19221
10	2.5707977	17457	10	2.6587058	19262
15	2.5725434	17491	15	2.6606320	19303
20	2.5742925	17526	20	2.6625623	19345
25	2.5760451	17560	25	2.6644968	19386
30	2.5778011	17596	30	2.6664354	19427
35	2.5795607	17630	35	2.6683781	19469
40	2.5813237	17666	40	2.6703250	19511
45	2.5830903	17701	45	2.6722761	19553
50	2.5848604	17736	50	2.6742314	19595
55	2.5866340	17772	55	2.6761909	19638
129. 0	2.5884112	17807	133. 0	2.6781547	19680
5	2.5901919	17843	5	2.6801227	19723
10	2.5919762	17879	10	2.6820950	19766
15	2.5937641	17915	15	2.6840716	19808
20	2.5955556	17951	20	2.6860524	19852
25	2.5973507	17987	25	2.6880376	19896
30	2.5991494	18024	30	2.6900272	19938
35	2.6009518	18060	35	2.6920210	19983
40	2.6027578	18097	40	2.6940193	20026
45	2.6045675	18134	45	2.6960219	20070
50	2.6063809	18171	50	2.6980289	20115
55	2.6081980	18208	55	2.7000404	20158
130. 0	2.6100188	18245	134. 0	2.7020562	20204
5	2.6118433	18282	5	2.7040766	20248
10	2.6136715	18320	10	2.7061014	20293
15	2.6155035	18357	15	2.7081307	20338
20	2.6173392	18395	20	2.7101645	20383
25	2.6191787	18433	25	2.7122028	20428
30	2.6210220	18471	30	2.7142456	20474
35	2.6228691	18510	35	2.7162930	20520
40	2.6247201	18547	40	2.7183450	20566
45	2.6265748	18586	45	2.7204016	20612
50	2.6284334	18625	50	2.7224628	20658
55	2.6302959	18663	55	2.7245286	20704

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
135° 0'	2.7265990	20751	139° 0'	2.8318224	23223
5	2.7286741	20798	5	2.8341447	23280
10	2.7307539	20846	10	2.8364727	23337
15	2.7328385	20892	15	2.8388064	23394
20	2.7349277	20939	20	2.8411458	23451
25	2.7370216	20987	25	2.8434909	23510
30	2.7391203	21035	30	2.8458419	23567
35	2.7412238	21083	35	2.8481986	23626
40	2.7433321	21131	40	2.8505612	23685
45	2.7454452	21179	45	2.8529297	23743
50	2.7475631	21228	50	2.8553040	23802
55	2.7496859	21276	55	2.8576842	23861
136. 0	2.7518135	21326	140. 0	2.8600703	23921
5	2.7539461	21374	5	2.8624624	23980
10	2.7560835	21424	10	2.8648604	24041
15	2.7582259	21473	15	2.8672645	24101
20	2.7603732	21523	20	2.8696746	24161
25	2.7625255	21572	25	2.8720907	24222
30	2.7646827	21623	30	2.8745129	24284
35	2.7668450	21673	35	2.8769413	24344
40	2.7690123	21723	40	2.8793757	24406
45	2.7711846	21775	45	2.8818163	24468
50	2.7733621	21825	50	2.8842631	24531
55	2.7755446	21876	55	2.8867162	24592
137. 0	2.7777322	21927	141. 0	2.8891754	24655
5	2.7799249	21979	5	2.8916409	24718
10	2.7821228	22030	10	2.8941127	24782
15	2.7843258	22083	15	2.8965909	24845
20	2.7865341	22135	20	2.8990754	24908
25	2.7887476	22186	25	2.9015662	24973
30	2.7909662	22240	30	2.9040635	25037
35	2.7931902	22292	35	2.9065672	25101
40	2.7954194	22345	40	2.9090773	25167
45	2.7976539	22399	45	2.9115940	25231
50	2.7998938	22452	50	2.9141171	25297
55	2.8021390	22505	55	2.9166468	25363
138. 0	2.8043895	22559	142. 0	2.9191831	25429
5	2.8066454	22614	5	2.9217260	25495
10	2.8089068	22667	10	2.9242755	25562
15	2.8111735	22722	15	2.9268317	25628
20	2.8134457	22777	20	2.9293945	25696
25	2.8157234	22832	25	2.9319641	25764
30	2.8180066	22887	30	2.9345405	25831
35	2.8202953	22942	35	2.9371236	25899
40	2.8225895	22999	40	2.9397135	25968
45	2.8248894	23058	45	2.9423103	26037
50	2.8271917	23111	50	2.9449140	26105
55	2.8295058	23166	55	2.9475245	26175

v.	LOG 𝔐.	DIFFÉR.	v.	LOG 𝔐.	DIFFÉR.
143°. 0'	2.9501420	26245	147°. 0'	3.0846070	30003
5	2.9527665	26315	5	3.0876073	30092
10	2.9553980	26385	10	3.0906165	30180
15	2.9580365	26456	15	3.0936345	30269
20	2.9606821	26526	20	3.0966614	30358
25	2.9633347	26598	25	3.0996972	30448
30	2.9659945	26670	30	3.1027420	30538
35	2.9686615	26741	35	3.1057958	30629
40	2.9713356	26814	40	3.1088587	30719
45	2.9740170	26886	45	3.1119306	30812
50	2.9767056	26959	50	3.1150118	30904
55	2.9794015	27033	55	3.1181022	30996
144. 0	2.9821048	27106	148. 0	3.1212018	31089
5	2.9848154	27180	5	3.1243107	31182
10	2.9875334	27255	10	3.1274289	31277
15	2.9902589	27329	15	3.1305566	31371
20	2.9929918	27404	20	3.1336937	31466
25	2.9957322	27480	25	3.1368403	31562
30	2.9984802	27554	30	3.1399965	31657
35	3.0012356	27632	35	3.1431622	31754
40	3.0039988	27708	40	3.1463376	31851
45	3.0067696	27784	45	3.1495227	31949
50	3.0095480	27862	50	3.1527176	32046
55	3.0123342	27939	55	3.1559222	32145
145. 0	3.0151281	28017	149. 0	3.1591367	32244
5	3.0179298	28095	5	3.1623611	32344
10	3.0207393	28174	10	3.1655955	32443
15	3.0235567	28253	15	3.1688398	32544
20	3.0263820	28332	20	3.1720942	32646
25	3.0292152	28412	25	3.1753588	32747
30	3.0320564	28492	30	3.1786335	32849
35	3.0349056	28573	35	3.1819184	32952
40	3.0377629	28653	40	3.1852136	33056
45	3.0406282	28735	45	3.1885192	33159
50	3.0435017	28817	50	3.1918351	33264
55	3.0463834	28899	55	3.1951615	33369
146. 0	3.0492733	28981	150. 0	3.1984984	33475
5	3.0521714	29064	5	3.2018459	33581
10	3.0550778	29147	10	3.2052040	33687
15	3.0579925	29232	15	3.2085727	33795
20	3.0609157	29315	20	3.2119522	33903
25	3.0638472	29400	25	3.2153425	34012
30	3.0667872	29485	30	3.2187437	34120
35	3.0697357	29570	35	3.2221557	34231
40	3.0726927	29656	40	3.2255788	34341
45	3.0756583	29742	45	3.2290129	34452
50	3.0786325	29829	50	3.2324581	34563
55	3.0816154	29916	55	3.2359144	34676

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
151° 0′	3.2393820	34798	155° 0′	3.4204064	41073
5	3.2428608	34903	5	3.4245137	41225
10	3.2463511	35016	10	3.4286362	41378
15	3.2498527	35131	15	3.4327740	41532
20	3.2533658	35247	20	3.4369272	41687
25	3.2568905	35363	25	3.4410959	41843
30	3.2604268	35479	30	3.4452802	42000
35	3.2639747	35598	35	3.4494802	42157
40	3.2675345	35715	40	3.4536959	42317
45	3.2711060	35834	45	3.4579276	42477
50	3.2746894	35954	50	3.4621753	42639
55	3.2782848	36073	55	3.4664392	42800
152. 0	3.2818921	36195	156. 0	3.4707192	42964
5	3.2855116	36327	5	3.4750156	43129
10	3.2891433	36439	10	3.4793285	43294
15	3.2927872	36561	15	3.4836579	43461
20	3.2964433	36686	20	3.4880040	43630
25	3.3001119	36810	25	3.4923670	43798
30	3.3037929	36936	30	3.4967468	43968
35	3.3074865	37061	35	3.5011436	44140
40	3.3111926	37189	40	3.5055576	44313
45	3.3149115	37315	45	3.5099889	44486
50	3.3186430	37444	50	3.5144375	44662
55	3.3223874	37574	55	3.5189037	44838
153. 0	3.3261448	37703	157. 0	3.5233875	45015
5	3.3299151	37833	5	3.5278890	45195
10	3.3336984	37965	10	3.5324085	45374
15	3.3374949	38098	15	3.5369459	45556
20	3.3413047	38230	20	3.5415015	45739
25	3.3451277	38364	25	3.5460754	45923
30	3.3489641	38499	30	3.5506677	46108
35	3.3528140	38634	35	3.5552785	46295
40	3.3566774	38771	40	3.5599080	46482
45	3.3605545	38908	45	3.5645562	46673
50	3.3644453	39046	50	3.5692235	46863
55	3.3683499	39185	55	3.5739098	47056
154. 0	3.3722684	39325	158. 0	3.5786154	47249
5	3.3762009	39465	5	3.5833403	47444
10	3.3801474	39607	10	3.5880847	47641
15	3.3841081	39749	15	3.5928488	47839
20	3.3880830	39893	20	3.5976327	48038
25	3.3920723	40037	25	3.6024365	48240
30	3.3960760	40182	30	3.6072605	48442
35	3.4000942	40328	35	3.6121047	48646
40	3.4041270	40476	40	3.6169693	48852
45	3.4081746	40623	45	3.6218545	49059
50	3.4122369	40773	50	3.6267604	49269
55	3.4163142	40922	55	3.6316873	49478

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
159° 0′	3.6366351	49691	163° 0′	3.9026107	62261
5	3.6416042	49904	5	3.9088368	62585
10	3.6465946	50120	10	3.9150953	62912
15	3.6516066	50337	15	3.9213865	63242
20	3.6566403	50556	20	3.9277107	63575
25	3.6616959	50776	25	3.9340682	63913
30	3.6667735	50999	30	3.9404595	64252
35	3.6718734	51223	35	3.9468847	64596
40	3.6769957	51449	40	3.9533443	64942
45	3.6821406	51676	45	3.9598385	65293
50	3.6873082	51906	50	3.9663678	65648
55	3.6924988	52138	55	3.9729326	66004
160. 0	3.6977126	52370	164. 0	3.9795330	66366
5	3.7029496	52606	5	3.9861696	66731
10	3.7082102	52844	10	3.9928427	67100
15	3.7134946	53082	15	3.9995527	67472
20	3.7188028	53324	20	4.0062999	67849
25	3.7241352	53566	25	4.0130848	68229
30	3.7294918	53812	30	4.0199077	68614
35	3.7348730	34059	35	4.0267691	69002
40	3.7402789	54308	40	4.0336693	69395
45	3.7457097	54560	45	4.0406088	69792
50	3.7511657	54813	50	4.0475880	70194
55	3.7566470	55069	55	4.0546074	70599
161. 0	3.7621539	55328	165. 0	4.0616673	71009
5	3.7676867	55587	5	4.0687682	71424
10	3.7732454	55849	10	4.0759106	71842
15	3.7788303	56115	15	4.0830948	72267
20	3.7844418	56381	20	4.0903215	72696
25	3.7900799	56651	25	4.0975911	73129
30	3.7957450	56922	30	4.1049040	73567
35	3.8014372	57197	35	4.1122607	74011
40	3.8071569	57473	40	4.1196618	74459
45	3.8129042	57753	45	4.1271077	74913
50	3.8186795	58034	50	4.1345990	75372
55	3.8244829	58318	55	4.1421362	75836
162. 0	3.8303147	58605	166. 0	4.1497198	76306
5	3.8361752	58894	5	4.1573504	76781
10	3.8420646	59187	10	4.1650285	77262
15	3.8479833	59481	15	4.1727547	77749
20	3.8539314	59778	20	4.1805296	78242
25	3.8599092	60079	25	4.1883538	78740
30	3.8659171	60381	30	4.1962278	79245
35	3.8719552	60688	35	4.2041523	79755
40	3.8780240	60996	40	4.2121278	80273
45	3.8841236	61308	45	4.2201551	80796
50	3.8902544	61623	50	4.2282347	81327
55	3.8964167	61940	55	4.2363674	81863

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
167° 0′	4.2445537	82407	171° 0′	4.7179835	120228
5	4.2527944	82958	5	4.7300063	121375
10	4.2610902	83515	10	4.7421438	122543
15	4.2694417	84080	15	4.7543981	123734
20	4.2778497	84652	20	4.7667715	124947
25	4.2863149	85232	25	4.7792662	126184
30	4.2948381	85820	30	4.7918846	127445
35	4.3034201	86415	35	4.8046291	128731
40	4.3120616	87017	40	4.8175022	130043
45	4.3207633	87630	45	4.8305065	131381
50	4.3295263	88248	50	4.8436446	132747
55	4.3383511	88877	55	4.8569193	134140
168. 0	4.3472388	89514	172. 0	4.8703333	135563
5	4.3561902	90159	5	4.8838896	137016
10	4.3652061	90814	10	4.8975912	138499
15	4.3742875	91477	15	4.9114411	140014
20	4.3834352	92151	20	4.9254425	141562
25	4.3926503	92834	25	4.9395987	143145
30	4.4019337	93526	30	4.9539132	144762
35	4.4112863	94228	35	4.9683894	146417
40	4.4207091	94942	40	4.9830311	148107
45	4.4302033	95665	45	4.9978418	149838
50	4.4397698	96399	50	5.0128256	151608
55	4.4494097	97145	55	5.0279864	153421
169. 0	4.4591242	97900	173. 0	5.0433285	155277
5	4.4689142	98669	5	5.0588562	157176
10	4.4787811	99447	10	5.0745738	159134
15	4.4887258	100240	15	5.0904862	161118
20	4.4987498	101043	20	5.1065980	163163
25	4.5088541	101859	25	5.1229143	165260
30	4.5190400	102689	39	5.1394403	167410
35	4.5293089	103531	35	5.1561813	169618
40	4.5396620	104387	40	5.1731431	171881
45	4.5501007	105257	45	5.1903312	174208
50	4.5606264	106141	50	5.2077520	176596
55	4.5712405	107040	55	5.2254116	179049
170. 0	4.5819445	107953	174. 0	5.2433165	181573
5	4.5927398	108882	5	5.2614738	184166
10	4.6036280	109826	10	5.2798904	186834
15	4.6146106	110786	15	5.2985738	189581
20	4.6256892	111764	20	5.3175319	192407
25	4.6368656	112757	25	5.3367726	195319
30	4.6481413	113769	30	5.3563045	198319
35	4.6595182	114798	35	5.3761364	201413
40	4.6709980	115845	40	5.3962777	204602
45	4.6825825	116911	45	5.4167379	207895
50	4.6942736	117997	50	5.4375274	211294
55	4.7060733	119102	55	5.4586568	214805

v.	LOG M.	DIFFÉR.	v.	LOG M.	DIFFÉR.
175°. 0′	5.4801373	218433	178°. 0′	6.6725724	554286
5	5.5019806	222186	5	6.7280010	578948
10	5.5241992	226068	10	6.7858958	605905
15	5.5468060	230088	15	6.8464863	635490
20	5.5698148	234253	20	6.9100353	668113
25	5.5932401	238569	25	6.9768466	704263
30	5.6170970	243047	30	7.0472729	744547
35	5.6414017	247696	35	7.1217276	789717
40	5.6661713	252523	40	7.2006993	840719
45	5.6914236	257543	45	7.2847712	898763
50	5.7171779	262765	50	7.3746475	965417
55	5.7434544	268201	55	7.4711892	1042748
176. 0	5.7702745	273867	179. 0	7.5754640	1133552
5	5.7976612	279774	2	7.6888192	1241684
10	5.8256386	285943	10	7.8129876	1372637
15	5.8542329	292388	15	7.9502513	1534498
20	5.8834717	299128	20	8.1037011	1739689
25	5.9133845	306185	25	8.2776700	2008344
30	5.9440030	313583	30	8.4785044	2375387
35	5.9753613	321344	35	8.7160431	2907259
40	6.0074958	329499	40	9.0067690	3748130
45	6.0404457	338078	45	9.3815820	5282715
50	6.0742535	347112	50	9.9098535	9030886
55	6.1089647	356642	55	10.8129421	
177. 0	6.1446289	366708	180. 0		
5	6.1812997	377357			
10	6.2190354	388643			
15	6.2578997	400620			
20	6.2979617	413360			
25	6.3392977	426933			
30	6.3819910	441427			
35	6.4261337	456938			
40	6.4718275	473575			
45	6.5191850	491470			
50	6.5683320	510766			
55	6.6194086	531638			

Table VI.

Réduction de la parabole à l'ellipse d'après la formule de Laplace, p. 452.

Anomalie vraie dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$, valeurs négatives de x.	Différences.	Anomalie vraie dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$, valeurs négatives de x.	Différences.
1°	7,6398284	3006659	31°	9,0406130	73902
2	7,9404943	1756504	32	9,0480032	67013
3	8,1161447	1243207	33	9,0547045	60097
4	8,2404654	961139	34	9,0607142	53521
5	8,3365793	784072	35	9,0660663	46989
6	8,4149865	655940	36	9,0707652	41782
7	8,4805805	567548	37	9,0749434	32947
8	8,5373353	495435	38	9,0782381	27835
9	8,5868788	440623	39	9,0810216	21539
10	8,6309411	395145	40	9,0831755	15220
11	8,6704556	357247	41	9,0846975	8892
12	8,7061803	325127	42	9,0855867	2483
13	8,7386930	297414	43	9,0858350	3963
14	8,7684344	273398	44	9,0854387	10535
15	8,7957742	252074	45	9,0843852	17067
16	8,8209816	233131	46	9,0826785	24196
17	8,8442947	216097	47	9,0802589	31050
18	8,8659044	200673	48	9,0771539	38296
19	8,8859717	186593	49	9,0733243	45788
20	8,9046310	173651	50	9,0687455	53574
21	8,9219961	162669	51	9,0633881	61692
22	8,9382630	149679	52	9,0572189	70221
23	8,9532309	140086	53	9,0501968	79195
24	8,9672395	130408	54	9,0422773	88707
25	8,9802803	121179	55	9,0334066	98814
26	8,9923982	112428	56	9,0235252	109621
27	9,0036410	104089	57	9,0125631	121246
28	9,0140499	96151	58	9,0004385	133891
29	9,0236650	88421	59	8,9870494	147569
30	9.0325071	81059	60	8,9722925	162606

ANOMALIE vraie dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$, valeurs négatives de x.	DIFFÉRENCES.	ANOMALIE vraie. dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$, valeurs positives. de x.	DIFFÉRENCES.
61°	8,9560319	179230	97°	9,2367841	271496
62	8,9381089	197747	98	9,2639337	265683
63	8,9183342	218558	99	9,2905020	252807
64	8,8964784	242066	100	9,3157827	243574
65	8,8722718	269475	101	9,3401401	235103
66	8,8453243	300936	102	9,3636504	227342
67	8,8152307	338262	103	9,3863846	220222
68	8,7814045	383130	104	9,4084068	214193
69	8,7430915	438278	105	9,4298261	204805
70	8,6992637	506877	106	9,4503066	202243
71	8,6485860	599359	107	9,4705309	199572
72	8,5886501	721609	108	9,4904881	191123
73	8,5164892	899644	109	9,5096004	187514
74	8,4265248	1180233	110	9,5283518	183338
75	8,3085015	1691021	111	9,5466856	179431
76	8,1393994	2862488	112	9,5646287	175860
77	7,8531506	22973984	113	9,5822147	172515
78	5,5557522		114	9,5994662	169249
	valeurs positives de x.				
79	7,8545992	3081431	115	9,6163911	166687
80	8,1627423	1826212	116	9,6330598	163876
81	8,3453635	1311981	117	9,6494474	161377
82	8,4765616	1030188	118	9,6655851	159011
83	8,5795804	851707	119	9,6814862	157121
84	8,6647511	728417	120	9,6971983	155091
85	8,7375928	638022	121	9,7127074	153319
86	8,8013950	568857	122	9,7280393	151743
87	8,8582807	514171	123	9,7432136	150294
88	8,9096978	465163	124	9,7582430	149025
89	8,9562141	437859	125	9,7731455	147881
90	9,0000000	402308	126	9,7879336	146914
91	9,0402308	375967	127	9,8026250	146034
92	9,0778275	353227	128	9,8172284	145356
93	9,1131502	333342	129	9,8317640	144803
94	9,1464844	315956	130	9,8462443	144382
95	9,1780800	300437	131	9,8606825	144139
96	9,2081237	286604	132	9,8750964	144017

ANOMALIE vraie. dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$ valeurs positives de x.	DIFFÉRENCES.	ANOMALIE vraie. dans la parabole.	$\log \frac{\sin x}{1-e}$, valeurs positives. de x.	DIFFÉRENCES.
133°	9,8894981		157°	0,2793918	
134	9,9038999	144018	158	0,3004951	211033
135	9,9183215	144216	159	0,3224015	219064
		144523			227986
136	9,9327738		160	0,3452001	
137	9,9472754	145016	161	0,3689948	237947
138	9,9618441	145687	162	0,3938963	249015
		146438			261735
139	9,9764879		163	0,4200698	
140	9,9912327	147448	164	0,4476541	275843
141	0,0060936	148609	165	0,4768541	292000
		149956			300060
142	0,0210892		166	0,5068601	
143	0,0362508	151616	167	0,5400001	331400
144	0,0515636	153128	168	0,5767585	367584
		155230			386666
145	0,0670866		169	0,6154251	
146	0,0828292	157426	170	0,6575891	421640
147	0,0988173	159881	171	0,7030412	454521
		162603			527717
148	0,1150776		172	0,7558129	
149	0,1315818	165042	173	0,8143491	585362
150	0,1485729	169911	174	0,8817661	674170
		172186			795782
151	0,1657915		175	0,9613443	
152	0,1833433	175518	176	1,0585773	972330
153	0,2015718	182285	177	1,1837679	1251906
		185834			1772712
154	0,2201552		178	1,3610391	
155	0,2392874	191322	179	1,6611767	3001376
156	0,2590123	197249	180		
		203795			

Anomalie vraie dans l'ellipse = anomalie vraie dans la parabole + x.

$$\sin x = \frac{1}{10} \tang \tfrac{1}{2} v \left[4 - 3 \cos^2 \tfrac{1}{2} v - 6 \cos^4 \tfrac{1}{2} v \right] (1 - e).$$

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA DEUXIÈME PARTIE.

ERRATA DU PREMIER VOLUME.

Pages.	Lignes.	
56	19, 20 et 21......	Divisez les trois sinus respectivement par sin b, sin b', sin b.
63	dernières.......	Au lieu de cot C et cot B, écrire cot c' et cot b'.
69	13 et 28.........	Supprimez le signe —.
95	2 en remontant..	(*note*) Au lieu de β, lisez 2β.
108	4 en remontant..	Au lieu de n verniers, lisez m verniers.
115	7 en remontant..	Au lieu de $l = 1$ et $l = l_1$, lisez $l = l_1$ et $l = 1$.
117	6..............	Au lieu de e^{-T^2}, lisez e^{T^2}.
118	5..............	Au lieu de $1 - \alpha$, lisez $s - x$.
191	11, 22 et 24.....	Au lieu de 39′, lisez 29′.
198	5..............	Au lieu de (p. 202), lisez (p. 208).
216	8..............	Supprimer le signe — à la limite inférieure de l'intégrale.
224	8 en remontant.	Au lieu de $\sqrt{2}$, lisez $\sqrt{\pi}$.
229	10..............	Au lieu de 21,5, lisez 99,8, et supprimez *et au-dessus*.
243	7 en remontant..	Au lieu de 30, lisez 34′.
262	11..............	Au lieu de 0,000086, lisez 0,0000086.
271	derniere.........	Mettre le signe = entre $\frac{b}{a'}$ et $\frac{\sin B'}{\sin A'}$.

Pages.	Lignes.	
296	22..............	Remplacez o^{T},o par un tiret.
312	11 en remontant.	Au lieu de 5141743^{T}, lisez 5131758.
328	5..............	Mettez $a = 6378393^{m}$; $e^2 = 0,0068395$.
328	15..............	L'exposant est $-\frac{1}{2}$.
328	17..............	L'exposant est -1.

ERRATA DU DEUXIÈME VOLUME.

Pages.	Lignes.	
7	13..............	Au lieu de 1, lisez -1.
8	2..............	Au lieu de δ, lisez 90°.
37	3 en remontant..	Remplacez $\cos L$ et $\sin L$ par $\sin L$ et $\cos L$.
38	9 et 8 en remont.	Au lieu de 21 et 22 mars, lisez 22 et 23 mars.
46	9..............	Au lieu de $\frac{dr}{r}$, lisez $\frac{dr}{r^2}$.
53	6 en remontant..	Au lieu de $2e \sin m\partial e$, lisez $2 \sin m\partial e$.
78	20..............	Au lieu de r, lisez r_1.
88	18..............	Au lieu de $\sin\beta$, lisez $\operatorname{coséc}\beta$.
92	3 en remontant..	Au lieu de $\sin N(\mathcal{L} - N)$, lisez $\sin 4(\mathcal{L} - N)$.
94	2..............	Au lieu de $+\cot i\partial i$, lisez $-\cot i\partial i$.
115	figure..........	Au lieu de V, lisez σ.
117	20, 21, 22........	Au lieu de $\frac{2\mu}{a}$, lisez $\frac{2\mu}{r}$.
153	4 en remontant..	Au lieu de $\frac{\sin^2\beta}{\rho} d\beta_1$, lisez $\frac{\rho}{\sin^2\beta_1} d\beta_1$.
162	10..............	Mettre au dénominateur le signe + au lieu du signe —.
162	dernière.........	Au lieu du facteur $\frac{1}{2}$, lisez $\frac{1}{3}$.
168	18..............	Le signe du dernier terme doit être —.
168	21..............	Au premier terme, au lieu de β_1, lisez β'_1.
168	21..............	Au deuxième terme, au lieu de L_1, lisez L'_1.
168	23..............	Au lieu de $\delta - \delta'$, lisez $\delta' - \delta$.
174	13..............	Deuxième colonne, au lieu de β'_1, lisez β_1.
174	14..............	Première colonne, au lieu de $L'_1 - \delta$, lisez $L_1 - \delta''$.
183	5..............	Remplacer $\sin E$ par $\cos E$ et $p \sin\lambda \sin$ ÆI par $p(\sin\delta \cos \quad - \cos\delta \sin\lambda \cos$ ÆH$)$.
183	6..............	Remplacer $\cos E$ par $\sin E$ et le dernier membre par $-p \sin\lambda \sin$ ÆH.
214	7..............	Au lieu de (ab^2), lisez $(\frac{1}{2}ab)^2$.
214	6 en remontant...	Au lieu de p. 838, lisez p. 338.
223	figure...........	Au lieu de *it*, lisez *i*.
233, 234	figures.......	Changer de sens les flèches inférieures.
237	2 et 4 en remont...	Au lieu de 22° et de $0'',37$, lisez 23° et $50'',37$.

Pages.	Lignes	
239	6...............	Au lieu de $\beta + \ldots$, lisez $\beta - \ldots$
259	19 et 260, ligne 5.	Supprimez le signe — au second membre.
267	10, 13, 14........	Au lieu de $\frac{W}{D}$, lisez $\frac{D}{W}$.
271	3 en remontant...	Lisez $\tang \lambda = \tang \delta \cos Æ$.
272	2................	Supprimez le signe — au second membre.
274	14, 24, 25........	Remplacez $\text{séc}\,\beta$ et $\text{séc}\,\delta$ par $\text{coséc}\,\beta$ et $\text{coséc}\,\delta$.
275	16...............	Au lieu de $+ 20'', 445$, lisez $- 20'', 445$.
275	20...............	Au lieu de $m + n \sin Æ \cot \delta$, lisez $(m + n \sin Æ \cot \delta) t$.
277	10 et 11..........	Dans $h \sin(Æ + G)$ et $h \cos(Æ + G)$ remplacez G par H.
333	16...............	Au lieu de L, lisez $L - \delta$.
379	10...............	Changer les signes du deuxième membre.
381	8................	Au lieu de Æ, lisez Æ.
384	1, 2 en remontant.	Mettez $\cos \delta'$ au lieu de $\cos z'$ dans le second membre.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

6574 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

